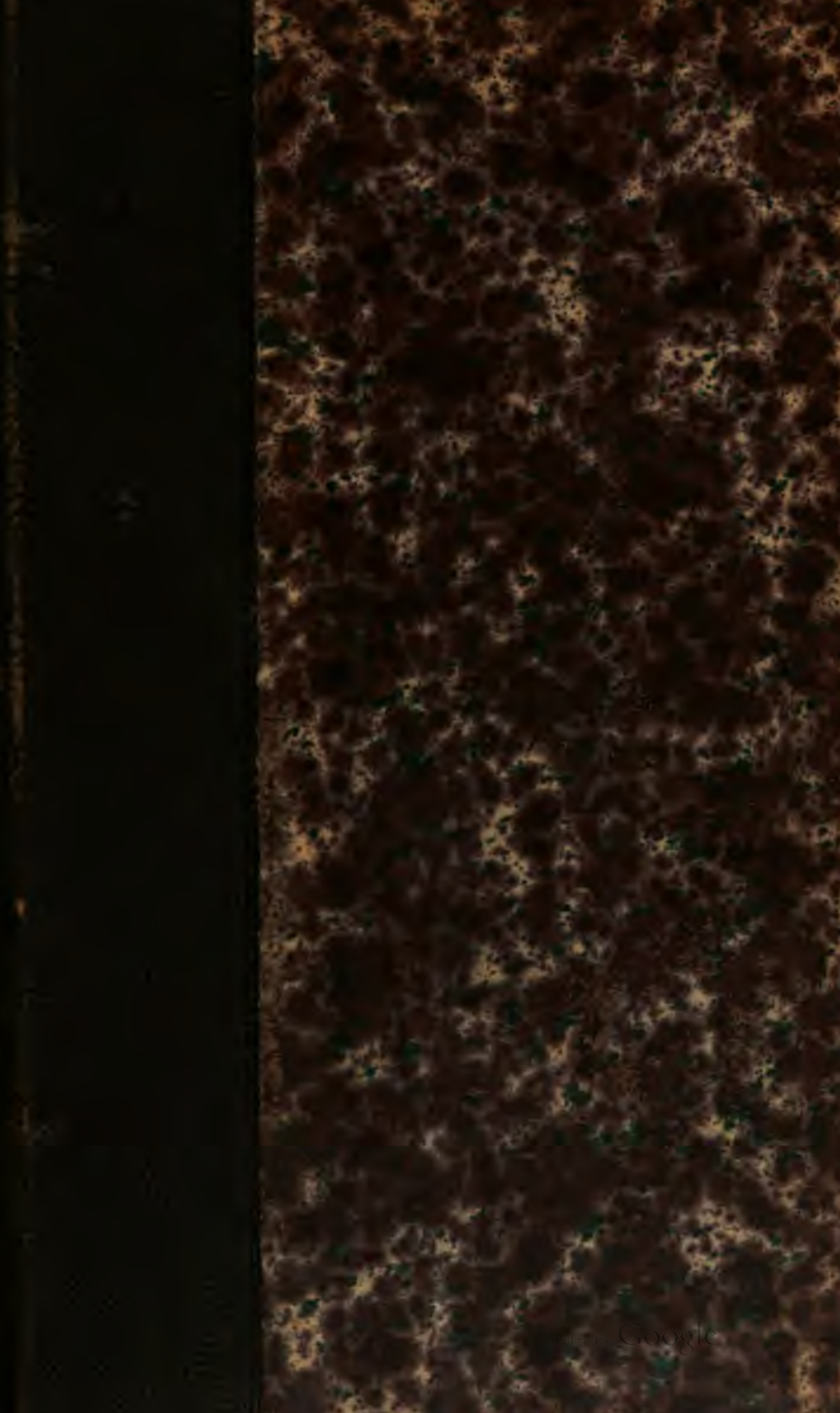



SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG
CHRISTO ET ECCLESIÆ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ
PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

JANVIER 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

# NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE

RÉDIGÉ PAR

M. GERONO,

Professeur de Mathématiques,

ET

M. CH. BRISSE,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1873 est en cours de publication.

On ne peut s'abonner que pour l'année entière.

L'abonnement est augmenté de 3 francs à partir de l'année 1869, et les prix pour les divers pays se trouvent dorénavant fixés ainsi qu'il suit :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Égypte, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Portugal, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége, Suède	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861), au lieu de 240 francs, 200 francs payables de la manière suivante : 100 francs comptant, et les 100 francs restants en un bon à trois mois à l'ordre de M. Gauthier-Villars, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes.

Les tomes X et XVI à XX (1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.

Les autres tomes de la première série se vendent séparément...... 12 fr.

La **DEUXIÈME SÉRIE**, commencée en 1862, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les tomes I à V (1862 à 1866) ne se vendent pas séparément.

Les tomes suivants de la première série se vendent séparément... 15 fr.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIEME SÉRIE.

1873.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
quai des Grands-Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1873.

Haven Fund.

Feb. 15, 1873 –
Jan. 15, 1874.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR UN NOUVEAU MODE DE CONSTRUCTION DES CONIQUES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

Dans sa belle théorie des caractéristiques, M. Chasles a fait voir qu'un segment de droite (double) devait quelquefois être considéré comme une conique infiniment aplatie. En effet, dans un système de coniques dont les caractéristiques sont μ et ν, il existe un nombre fixe $(2\mu-\nu)$ de segments de droites qui participent en un certain sens aux propriétés des coniques du système (*).

Le nouveau mode de construction des coniques que je vais exposer, étant comparé à l'un des modes les plus usuels, mettra en relief l'existence d'une propriété commune aux véritables coniques et aux coniques infiniment aplaties.

Je ferai voir, en effet, que *si, en chaque point d'une conique à centre, et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la normale, on porte une*

(*) *Voir* l'exposition élémentaire de la méthode des caractéristiques de M. Chasles, donnée par Prouhet dans les *Nouvelles Annales*; 1866, p. 193.



longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux rayons focaux relatifs à ce point, l'extrémité de cette longueur décrira une nouvelle conique concentrique à la première et de même genre qu'elle.

On conçoit qu'une infinité de coniques distinctes pourront être ainsi dérivées d'une autre. Elles différeront entre elles soit par l'inclinaison constante de la moyenne géométrique des rayons focaux sur la normale, soit par le coefficient attribué à cette moyenne. — C'est ce mode de construction qui fait l'objet (*) du présent article. Or il y a cet autre mode, usuel et très-élémentaire : *Si, à partir de chaque point* C *d'une droite terminée aux points* A *et* B, *on porte dans une direction constante une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux segments* CA, CB, *l'extrémité de cette longueur a pour lieu une conique à centre.* Cette conique est une ellipse si les points C sont entre A et B; une hyperbole, s'ils sont en dehors. Dans le premier cas, le segment AB peut être considéré comme une ellipse aplatie; dans le second cas, les segments de la direction AB, qui sont extérieurs aux limites A et B, et qui s'é-

(*) Je dis l'*objet* et non pas l'*objectif;* c'est que, malgré la faveur universelle accordée à ce dernier mot depuis quelques années, je ne puis me résoudre à l'employer dans le nouveau sens qui lui est attribué. Je sais bien que pour des idées nouvelles, ou même pour d'anciennes idées que la marche du temps aura modifiées, c'est le privilége d'une langue vivante de créer des mots nouveaux, ou même de modifier le sens de quelques mots anciens; mais quand des mots consacrés par l'usage n'ont pas cessé de répondre exactement à l'idée qu'on veut exprimer, leur substituer un mot qui correspond à une idée d'un tout autre ordre, n'est-ce pas, pour une langue vivante, un signe de décadence plus que de vitalité? Et, par exemple, quand on a le choix entre des mots aussi expressifs que les suivants, *objet, but, visée,* etc., pourquoi leur substituer un vocable emprunté aux marchands de lunettes? Pour moi, lorsque dans un salon, ou au barreau, ou à la tribune, un discoureur parle de son OBJECTIF, je me sens toujours en curiosité de savoir où est son OCCLAIRE.

tendent à l'infini de part et d'autre, peuvent être considérés comme les deux branches d'une hyperbole aplatie. Dans les deux cas, on peut dire que les points extrêmes A et B sont les foyers de la conique, et que AC, BC sont les rayons focaux du point C. Enfin les lignes issues des différents points de AB et sur lesquelles on porte des longueurs déterminées comme il a été expliqué, ces lignes ayant une direction fixe, font un angle constant avec une droite perpendiculaire à AB, c'est-à-dire avec la bissectrice des deux rayons focaux, ou encore avec la normale de la conique aplatie.

Dans ce mode usuel, une infinité de coniques distinctes dérivent d'une même conique aplatie qu'on peut considérer comme leur base commune, et l'on peut dire que les coniques du nouveau mode ont à leur tour une base commune qui est une conique non aplatie. Or les unes et les autres dérivent de leurs bases respectives suivant une loi qui est, comme on vient de le voir, exactement la même pour les deux modes. Il y a plus; parmi les coniques issues d'une conique aplatie AB, considérons seulement celles qui sont relatives à une même inclinaison de la moyenne géométrique sur la base, et qui ne diffèrent entre elles que par le coefficient attribué à cette moyenne (*); si on construit la tangente de chacune d'elles dans les points où elles sont rencontrées par une même droite, issue d'un point C de la base selon l'inclinaison particulière au système, on sait que toutes ces tangentes rencontrent la base AB en un même point D, qui est le conjugué harmonique de C par rapport aux points A et B (foyers de la conique aplatie). — Eh bien,

(*) C'est-à-dire, considérons un système de coniques ayant un diamètre commun et les cordes conjuguées à ce diamètre selon une même direction.

cette propriété si connue se retrouve (*mutatis mutandis*) dans les coniques construites selon le nouveau mode; mais il faut d'abord démontrer la proposition principale.

II.

Dans les articles que j'ai publiés antérieurement sur le calcul directif (*Nouvelles Annales*, 1868), j'ai établi un cas très-particulier de cette proposition, celui où il s'agit de placer sur la normale d'une ellipse et de part et d'autre du point de la courbe une longueur précisément égale à la moyenne géométrique des deux rayons focaux. J'ai fait voir qu'on trouve alors deux cercles concentriques à l'ellipse donnée, et qui ont pour rayons respectivement la somme et la différence de ses deux axes.

Le calcul directif offrait pour ce cas particulier un moyen de démonstration infiniment facile. Son application au théorème général, quoique un peu moins simple, fera voir encore une fois qu'il peut rivaliser, non sans avantage, avec la méthode des coordonnées. Quoi qu'il en soit, ce sera un exercice intéressant pour ceux des lecteurs des *Nouvelles Annales* qui auront pris connaissance des règles de ce calcul, ou mieux encore qui auront été préalablement initiés à la *Théorie des équipollences* de M. Bellavitis, exposée dans ce Recueil par M. Hoüel (*Nouvelles Annales*, 1869) (*).

(*) En terminant la publication de mes articles sur *l'Algèbre directive*, j'ai été informé et je me suis empressé d'annoncer (*Nouv. Ann.*, 1868) que l'éminent professeur de l'Université de Padoue possédait depuis longtemps et avait publié en un vrai corps de doctrine, avec beaucoup d'autres beaux résultats, quelques-uns de ceux que je venais de trouver moi-même en développant les idées d'Argand, de Français, de Mourey et de M. Faure (de Gap), sur les *nombres inclinés;* sur ces nombres pendant si longtemps et maintenant encore si indûment appelés *nombres imaginaires.*

Supposons donc une ellipse dont les axes soient a et b, a étant l'axe focal dont la direction sera considérée comme l'origine des inclinaisons. Si x est une longueur comptée sur cet axe à partir du centre de la courbe, l'ordonnée cartésienne serait

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

le rayon central Y_0 sera représenté, en calcul directif, par une *somme algébrique* :

$$Y_0 = x + \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Le second terme de cette somme a manifestement une direction perpendiculaire à celle du premier, puisque $x^2 - a^2$ est nécessairement négatif. En même temps, les deux rayons focaux sont représentés (conformément aux règles du calcul directif) par $Y_0 + c$, $Y_0 - c$; leur moyenne géométrique, nécessairement dirigée selon la normale (*), est égale à $\sqrt{Y_0^2 - c^2}$; et si on la multiplie par un coefficient directif m, de grandeur et de direction déterminées, on aura une longueur proportionnelle à la moyenne en question et inclinée sur la normale d'un angle constant. Comme on aura pu porter cette longueur de part et d'autre du point de la courbe, les extrémités de ces deux longueurs égales seront fixées sur le plan par un rayon vecteur Y_m, dont l'expression ci-dessous, à cause du double signe qu'elle contient, convient également aux deux, savoir :

$$Y_m = Y_0 \pm m\sqrt{Y_0^2 - c^2};$$

(*) Je donnerai à la fin de cet article la détermination en grandeur et en direction de la moyenne géométrique de deux lignes diversement inclinées.

ou bien, en remplaçant Y_0 par sa valeur et c^2 par $a^2 - b^2$,

$$Y_m = x + \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$
$$\pm \frac{m}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)x^2 - a^4 + 2abx\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Le second de ces deux radicaux est assimilable à la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$, qui se ramène, comme on sait, à la somme suivante :

$$\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}};$$

or, dans l'application actuelle, on a

$$\alpha = (a^2 + b^2)x^2 - a^4; \quad \beta = 2abx\sqrt{a^2 - x^2},$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = a^4 - (a^2 - b^2)x^2.$$

D'après cela, on trouve, après toute réduction,

$$Y_m = \frac{a \pm mb}{a}x + \frac{b \pm ma}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

A peine est-il besoin d'observer que, en supposant $m = 0$, on retrouve Y_0, c'est-à-dire le rayon vecteur de l'ellipse aux axes a et b, base commune de toutes les courbes à rayons vecteurs Y_m. D'ailleurs il est aisé de reconnaître ici les rayons vecteurs de deux ellipses distinctes. En effet, le premier terme représente une ligne que nous appellerons x', laquelle a la même origine que x, c'est-à-dire le centre de l'ellipse (a, b). Cette ligne x', ou $(a \pm mb)\frac{x}{a}$, est inclinée sur l'axe focal, ou bien, au contraire, est sans inclinaison, selon que le

coefficient m est lui-même incliné ou non; et, dans tous les cas, la direction de x' est la même que celle de la ligne $a \pm mb$, puisque le quotient $\frac{x}{a}$, qui entre comme facteur dans la composition de x', est sans inclinaison. Or le rayon vecteur Y_m, étant exprimé en x', prend la forme

$$Y_m = x' + \frac{b \pm ma}{a \pm mb} \sqrt{x'^2 - (a \pm mb)^2}.$$

La quantité sous le radical est négative, puisque x'^2 est égal à $(a \pm mb)^2 \frac{x^2}{a^2}$, et qu'on a toujours $\frac{x^2}{a^2} < 1$. Ainsi le second terme de Y_m représente une ligne dont la direction est inclinée sur celle du premier terme x' d'un angle égal à l'inclinaison du facteur $\frac{b \pm ma}{a \pm mb}$ augmentée de 90 degrés. Appelons α cet angle total. L'extrémité de Y_m s'obtient donc en élevant, en chaque point de la base rectiligne $2(a \pm mb)$ et sous l'angle α, une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux segments $a \pm mb + x'$, $a \pm mb - x'$. A ces caractères, on reconnaît une ellipse.

Autrement : Y_m est la somme algébrique de deux termes qui ont sur le plan deux directions fixes. Prenons deux axes de coordonnées tracés selon ces deux directions, et convenons de représenter, comme M. Bellavitis, la grandeur absolue de toute longueur inclinée par la préfixe $\overline{gr}$; on aura, pour la double équation cartésienne, correspondant aux deux valeurs de Y_m, la forme suivante, qui est bien celle de deux ellipses :

$$\frac{y^2}{\overline{gr}^2\,(b \pm ma)} + \frac{x^2}{\overline{gr}^2\,(a \pm mb)} = 1.$$

En terminant ce paragraphe, il doit m'être permis

de faire observer que j'aurais pu affecter une plus grande concision, si je n'étais pas fondé à croire que, probablement, quelques-uns des lecteurs des *Nouvelles Annales* sont peu familiarisés avec la pratique du calcul directif. On doit avoir égard à cette observation pour apprécier équitablement ce calcul.

III.

Pour établir le théorème commun aux coniques à base aplatie et à base non aplatie, j'observe d'abord que si l'équation d'une courbe quelconque en calcul directif est la suivante :

$$Y = \varphi(x),$$

où Y est le rayon vecteur de cette courbe, et x une variable indépendante qui peut être elle-même le rayon d'une courbe directrice de la proposée, ou plus simplement, ainsi que je l'ai supposé dans les paragraphes précédents, une longueur variable sans inclinaison, la direction de la tangente à la courbe proposée sera donnée par l'angle du quotient

$$\frac{dY}{dx} = \varphi'(x).$$

En même temps, l'équation d'une ligne droite issue du point qui correspond sur la courbe à une valeur de x sera donnée par son rayon vecteur

$$OL = Y + l\frac{dY}{dx},$$

expression dans laquelle l est une ligne de longueur variable, mais d'inclinaison constante. Si α est cette inclinaison, la droite dont il s'agit fera avec la tangente ce même angle α. Donc, si α est nul, c'est-à-dire si l est

sans inclinaison, l'équation ci-dessus sera l'équation de la tangente elle-même.

A l'aide de ces principes, on démontrera d'abord comme il suit la propriété bien connue des tangentes aux coniques qui sont dérivées d'une base rectiligne.

L'équation de ces coniques résulte de la valeur ci-dessus de Y_m, dans laquelle on fera $b = 0$; il vient alors, pour le rayon vecteur,

$$(Y_m) = x \pm m\sqrt{x^2 - a^2},$$

d'où

$$\frac{d(Y_m)}{dx} = 1 \pm \frac{mx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Une droite issue d'un point quelconque de la courbe a donc pour équation

$$\mathrm{OL} = x + l \pm m\left(\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{lx}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right).$$

Or, en prenant pour l la valeur particulière

$$l = \frac{a^2}{x} - x,$$

qui annule le coefficient de m, on a un rayon vecteur particulier

$$\mathrm{OD} = \frac{a^2}{x}$$

commun à toutes les droites OL relatives aux différentes ellipses caractérisées par les diverses valeurs de m. Ces droites concourent donc en un même point D. D'ailleurs la valeur de l est sans inclinaison; ces droites sont donc les tangentes elles-mêmes. De plus, le rayon vecteur OD est lui-même sans inclinaison; donc le point D est sur le prolongement de la base AB. Enfin, en

appelant C l'extrémité de x, de sorte que $x = OC$, on a

$$OC.OD = a^2;$$

de sorte que les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de la base, c'est-à-dire *par rapport aux foyers de la conique aplatie.*

Considérons maintenant une ellipse dérivée d'une base non aplatie (dérivée d'une ellipse aux axes a et b).

Une droite issue d'un point quelconque de cette ellipse a pour équation, ainsi qu'on l'a expliqué,

$$OL = Y_m + l\frac{dY_m}{dx}.$$

On a d'ailleurs

$$Y_m = Y_0 \pm m\sqrt{Y_0^2 - c^2} \quad \text{et} \quad \frac{dY_m}{dx} = \frac{dY_0}{dx} \pm m\frac{Y_0\frac{dY_0}{dx}}{\sqrt{Y_0^2 - c^2}}.$$

Le rayon vecteur de cette droite reçoit donc la forme suivante :

$$OL = Y_0 + l\frac{dY_0}{dx} \pm \frac{m}{\sqrt{Y_0^2 - c^2}}\left(Y_0^2 - c^2 + lY_0\frac{dY_0}{dx}\right).$$

Or en prenant pour l la valeur qui annule le coefficient de m, savoir :

$$l = \frac{c^2 - Y_0^2}{Y_0\frac{dY_0}{dx}} \quad \text{ou bien} \quad l = (a^2 - x^2)\frac{\frac{dY_0}{dx}}{Y_0},$$

on a un rayon vecteur particulier

$$OD = \frac{c^2}{Y_0},$$

lequel est commun à toutes les droites OL. Ces droites concourent donc au point D. D'ailleurs cette valeur

de l n'est pas sans inclinaison : elle est inclinée d'un angle égal à celui du quotient directif $\frac{dY_0}{dx}$: Y_0. Donc ces droites ne sont pas tangentes à leurs courbes respectives, mais elles font avec les diverses tangentes ce même angle (*).

Enfin si, dans le numérateur de OD, on remplace c^2 par sa valeur, et dans le dénominateur Y_0 par OC, il viendra

$$OC.OD = a^2 - b^2;$$

par conséquent le point D est le conjugué harmonique du point C *par rapport aux deux foyers de la courbe de base.*

Pour apprécier cette remarquable analogie entre les coniques à base aplatie et à base non aplatie, il faut savoir que deux couples de points peuvent sur un plan, comme deux couples de points sur une même droite, former *une proportion harmonique ;* ou, en d'autres termes, que quatre points sur un plan peuvent former un *quadrilatère harmonique.* Quoi qu'il en soit, je ferai voir (§ V) comment on peut construire le point D au moyen des deux foyers et du point C.

IV.

Voici maintenant le nouveau mode de construction pour les coniques dénuées de centre :

Si, en chaque point d'une parabole et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la

(*) C'est un angle égal à celui que le rayon Y_0 prolongé fait avec la tangente à la courbe de base, mais à cet angle *pris négativement ;* de sorte que, C étant le point extrême du rayon Y_0, la tangente à la base en C est bissectrice de CD et de Y_0 prolongé.

normale, on porte une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique entre le rayon vecteur et une longueur constante, l'extrémité de cette longueur aura pour lieu une autre parabole, dont l'axe aura la même direction que celui de la première.

Soit p le paramètre de la parabole donnée ; prenons son foyer pour centre des rayons vecteurs, et la direction de son axe pour origine des inclinaisons. Son rayon vecteur, identique avec son rayon focal, aura pour expression la somme algébrique

$$Y_0 = x + \sqrt{-p(2x+p)}.$$

Le rayon vecteur de l'une des courbes dérivées de cette base sera

$$Y_m = Y_0 + m\sqrt{-2Y_0 q},$$

où q est une ligne sans inclinaison, et m un nombre directif de grandeur et de direction déterminées.

Cette valeur de Y_m, exprimée en fonction de x, est la suivante :

$$Y_m = x + \sqrt{-p(2x+p)} + m\sqrt{-2q}\sqrt{x+\sqrt{-p(2x+p)}}.$$

En lui appliquant le même calcul qu'au rayon vecteur issu d'une ellipse de base (dans le précédent paragraphe), il viendra

$$Y_m = m\sqrt{pq} + x + \frac{\sqrt{p}+m\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\sqrt{-p(2x+p)}.$$

Or, si l'on transporte l'origine au point dont le rayon vecteur est $m\sqrt{pq}$, le nouveau rayon vecteur du lieu sera exprimé par la somme des deux derniers termes de Y_m, et alors on reconnaîtra aisément que ce lieu est une parabole.

Il y aura une infinité de telles paraboles se distinguant entre elles par les valeurs de q et de m. Si l'on considère une ligne droite issue d'un point quelconque de l'une d'elles, le rayon vecteur de cette droite, mesuré à partir du foyer de la parabole de base, sera

$$OL = Y_m + l\frac{dY_m}{dx};$$

c'est-à-dire

$$OL = Y_0 + l\frac{dY_0}{dx} + m\sqrt{-2q}\left(\sqrt{Y_0} + l\frac{\frac{dY_0}{dx}}{2\sqrt{Y_0}}\right).$$

Or, en prenant pour l la valeur qui annule le coefficient de m, savoir

$$l = -\frac{2Y_0}{\frac{dY_0}{dx}},$$

on a un rayon vecteur particulier

$$OD = -Y_0,$$

lequel est commun à toutes les droites OL. Ces droites concourent donc au point D. Ce point est, comme on voit, sur le prolongement du rayon vecteur de la parabole de base, et à égale distance de l'autre côté du foyer. Cette propriété répond à celle des paraboles à base aplatie, pour lesquelles *la sous-tangente est le double de l'abscisse*, puisque alors l'abscisse n'est autre que le rayon focal de la base.

On peut aussi remarquer que les deux points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux deux foyers de la parabole non aplatie; parce que, dans un quadrilatère harmonique, si l'un des points passe à l'infini dans une direction quelconque, son conjugué se place au milieu de la diagonale qui réunit les deux autres sommets.

V.

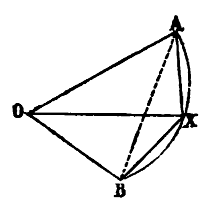
J'arrive à montrer comment on peut construire en grandeur et en direction la moyenne géométrique de deux lignes inclinées; c'est-à-dire comment on peut résoudre le problème de *construire la ligne* OX *déterminée par l'équation directive suivante où* OA *et* OB *sont données :*

$$OA.OB = \overline{OX}^2.$$

On déduit de là

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OB},$$

d'où il résulte premièrement que OA est inclinée sur OX autant que OX l'est sur OB; c'est-à-dire que OX est sur la bissectrice de l'angle AOB.



De plus, l'égalité des rapports directifs $\frac{OA}{OX}$ et $\frac{OX}{OB}$ prouve que les deux triangles OAX, OXB sont semblables. Par conséquent, la somme des deux angles en X est égale à la somme des deux angles en A et B, et l'angle total $\widehat{AXB}$ est le supplément à 180 degrés de $\frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

On construira donc sur AB un segment AXB capable de 180 degrés $- \frac{1}{2}\widehat{AOB}$, et le point X sera à la rencontre de ce segment avec la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Si les deux lignes OA, OB sont en prolongement l'une de l'autre, c'est-à-dire si l'angle en O vaut deux droits, on retrouve comme cas particulier la construction donnée dans les *Éléments de Géométrie*.

Le point D, qu'il nous restait à construire à la fin du paragraphe III, était déterminé par l'équation

$$OC.OD = \overline{OF}^2.$$

C'est comme si, dans la figure précédente, on donnait les lignes OA et OX, et qu'il fallût construire OB.

VI.

La propriété relative aux tangentes, qui est si connue dans un système de coniques dérivées d'une conique infiniment aplatie, et que nous avons retrouvée dans tout système de coniques dérivées (selon la même loi) d'une conique non aplatie, pourrait sembler d'abord une dépendance essentielle de la nature des coniques, et par suite une propriété exclusive de ces sortes de courbes; mais il n'en est pas ainsi : la propriété en question résulte du mode de dérivation, et en ce sens elle est indépendante de la nature particulière de la base.

En effet, soit une courbe quelconque : « En chacun de ses points C et sur une droite inclinée d'un angle constant sur la bissectrice des deux rayons focaux de ce point, soit portée une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique de ces deux rayons. » L'extrémité de cette longueur engendrera une infinité de courbes qui différeront entre elles, soit par l'angle constant, soit par le coefficient de proportionnalité, soit par ces deux éléments à la fois. Or les droites qui seront construites pour ces courbes de

la manière que nous avons indiquée pour celles dont la base est une conique se rencontreront aussi en un même point D, lequel sera encore le conjugué harmonique du point C de la courbe donnée par rapport aux deux foyers.

C'est que la circonstance de ces rencontres est une propriété générale de la transformation directive du second ordre, c'est-à-dire de la transformation représentée en calcul directif par l'équation générale du second degré. J'ai démontré, en effet (*Nouvelles Annales*, 1868), qu'une telle équation se ramène à la forme simple

$$Y = X + m\sqrt{X^2 - c^2},$$

dans laquelle X est le rayon vecteur de la figure transformée, et Y celui de la figure transformante.

A cette occasion, j'ai fait remarquer que la transformation des figures par le moyen des équations directives semble ouvrir un vaste champ aux investigations géométriques, puisque, dans chaque ordre ou degré, les courbes transformantes ont d'abord des propriétés dépendantes des courbes transformées (courbes appelées *bases de dérivation* dans le présent article), et de plus ont aussi des propriétés communes qui dépendent essentiellement du mode de dérivation, comme on en a ci-dessus un exemple remarquable. Et enfin, de même qu'il y a des propriétés communes à toutes les courbes dites *algébriques* dans la méthode des coordonnées cartésiennes, il y a aussi en calcul directif des propriétés communes à toutes les transformations représentées par des équations algébriques.

P.-S. — Non-seulement à l'occasion des *caractéristiques*, mais aussi dans le *Traité des sections coniques*, M. Chasles fait voir qu'on peut considérer un segment de droite limitée comme une conique infiniment aplatie.

SUR LE THÉORÈME DE DANDELIN;

PAR M. ABEL TRANSON.

Lorsqu'un plan coupe un cône de révolution, si une sphère est inscrite dans le cône de manière à toucher ce plan, le point de contact est l'un des foyers de la section, et la directrice correspondant à ce foyer est la droite de rencontre du plan sécant avec le plan de contact de la sphère et du cône. Tel est le beau théorème dû à MM. Quetelet et Dandelin.

Ce théorème a une extension bien connue. Si une autre sphère, inscrite aussi dans le cône, pénètre le plan sécant, la distance tangentielle d'un point de la section conique au cercle de pénétration est dans un rapport constant avec la distance de ce point à la droite de rencontre du plan sécant avec le plan de contact de la nouvelle sphère et du cône. Ce cercle de pénétration peut être appelé un *cercle focal*, et la droite dont il s'agit une *directrice* relative à ce cercle.

Mais si la sphère inscrite au cône ne touche ni ne pénètre le plan sécant, devient-elle étrangère à la conique, étrangère aux propriétés focales de la conique?... On va voir qu'il n'en est pas ainsi.

Lemme.— « Soit une sphère de rayon r, dont le centre C est à la distance a d'un plan donné; toutes les sphères qui ont leurs centres sur le plan et qui coupent orthogonalement la première se rencontrent en un même point placé sur la perpendiculaire abaissée du centre C et à une hauteur égale à $\sqrt{a^2-r^2}$; » proposition connue et d'ailleurs très-facile à démontrer.

Maintenant si l'on se représente une sphère inscrite au

cône, mais ne touchant ni ne pénétrant le plan sécant, on montrera, précisément comme pour la sphère tangente ou pénétrante, que la portion d'arête du cône comprise entre le plan de contact et un point quelconque *m* de la section conique est dans un rapport constant avec la distance de ce point à la droite de rencontre des deux plans. D'ailleurs cette portion d'arête issue du point *m* est égale à la distance de ce même point à celui qu'on aura placé, selon la règle indiquée dans le lemme, sur la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan sécant; car ces deux distances sont des rayons d'une même sphère dont le centre est *m*.

Ce point de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère est indépendant de la situation du point *m* sur le périmètre de la conique. C'est un véritable *foyer* qui a sa propre *directrice*.

On démontrera aussi, absolument comme dans le cas de deux sphères tangentes à une section elliptique, que si l'on considère les deux foyers relatifs à deux sphères non pénétrantes, *la somme* des deux rayons vecteurs est constante pour tous les points de l'ellipse si les deux sphères sont situées l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan sécant. Ce serait *la différence* si elles étaient du même côté. Dans le cas de la section hyperbolique, c'est toujours *la différence*, parce que les sphères non pénétrantes sont toujours d'un même côté du plan sécant.

On retrouve ainsi ces foyers extérieurs au plan de la conique, dont l'existence et les propriétés sont bien connues.

RECTIFICATION.

Les questions 1056, 1079 et 1080 ont été résolues par M. Lucien Bignon, de Lima.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Doucet, professeur au lycée de Lyon. — Permettez-moi, je vous prie, de revenir un instant sur une question traitée deux fois déjà dans les *Annales*, et qui est la suivante :

Par deux points fixes A *et* B *pris sur une ellipse donnée, on fait passer des cercles variables; on demande le lieu des points* M *où concourent les tangentes menées à l'ellipse et à chacun des cercles.*

Vous avez donné, Monsieur, dans les *Nouvelles Annales* (1re série, t. X, p. 408) une solution géométrique qui ne laisse rien à désirer. En même temps, vous demandiez à vos lecteurs une solution analytique qui, en raison de certaines difficultés, devait être *intéressante* et *instructive* (*).

M. Breton (de Champ) a donné une solution de cette nature, fondée sur les principes de l'homologie. Cette solution est reproduite par M. Housel, dans son *Introduction à la Géométrie supérieure* (p. 177). « L'analyse ordinaire, dit cet auteur, ne donnerait pas uniquement l'équation du lieu cherché, parce que les quatre tangentes communes que le calcul indique toujours pour deux coniques se coupent deux à deux en six points.... » Il fallait donc avoir recours aux formules de l'homologie pour n'obtenir que le facteur du second degré, qui résout seul la question.

Je vous adresse, Monsieur, une solution analytique

(*) Cette solution a été donnée par MM. Mister et Neuberg, 2e série, t. II, p. 481; et par M. Paul Serret, 2e série, t. III, p. 49.



que j'ai eu l'occasion de donner à des élèves de Mathématiques spéciales. Je ne fais usage que de l'analyse la plus ordinaire; c'est un calcul très-simple, dans lequel le besoin de l'homologie ne se fait nullement sentir.

Soit $T = 0$ l'équation du système des deux tangentes menées à l'ellipse par le point $M(\alpha, \beta)$ qui correspond à l'un des cercles.

Soient en outre $P = 0$, $Q = 0$ les polaires de ce point dans l'ellipse et dans le cercle. Ces deux courbes peuvent être représentées par les équations

$$T + \lambda P^2 = 0, \tag{1}$$

$$T + \mu Q^2 = 0, \tag{2}$$

λ et μ étant deux paramètres à déterminer.

En retranchant, on a

$$P\sqrt{\lambda} = \pm Q\sqrt{\mu},$$

équation d'un système de cordes communes. Prenons, pour la droite AB,

$$P\sqrt{\lambda} = Q\sqrt{\mu}. \tag{3}$$

Soit maintenant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{4}$$

l'équation de l'ellipse. Alors

$$T = (\beta^2 - b^2)(x - \alpha)^2 - 2\alpha\beta(x - \alpha)(y - \beta) + (\alpha^2 - a^2)(y - \beta)^2,$$

$$P = \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1.$$

Pour identifier les équations (1) et (4), il suffit d'annuler, dans la première, le coefficient de xy; il en résulte

$$\lambda = a^2 b^2.$$

Soit d'ailleurs $Q = y + px + q$. L'équation (3) devient

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) ab = (y + px + q)\sqrt{\mu},$$

et si l'on désigne par x_1, y_1 les coordonnées à l'origine de la droite AB, on a

$$\left(\frac{\alpha x_1}{a^2} - 1\right) ab = (px_1 + q)\sqrt{\mu},$$

$$\left(\frac{\beta y_1}{b^2} - 1\right) ab = (y_1 + q)\sqrt{\mu}.$$

En retranchant, on élimine q, et il vient

$$\left(\frac{\alpha x_1}{a^2} - \frac{\beta y_1}{b^2}\right) ab = (px_1 - y_1)\sqrt{\mu},$$

équation où n'entre que le rapport $\frac{y_1}{x_1}$, et qui montre par là que le lieu cherché ne dépend que de la direction de AB. Soit $m = -\frac{y_1}{x_1}$ le coefficient angulaire de cette direction. L'équation ci-dessus devient

$$\left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta m}{b^2}\right) ab = (p + m)\sqrt{\mu}.$$

Exprimons maintenant que la courbe (2) est un cercle; il vient

$$\beta^2 - \alpha^2 + a^2 - b^2 = \mu(1 - p^2),$$

$$p = \frac{\alpha\beta}{\mu}.$$

Substituons cette valeur de p dans les deux équations qui précèdent, on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta m}{b^2}\right) ab = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\mu}} + m\sqrt{\mu},\\ &\beta^2 - \alpha^2 + a^2 - b^2 = \mu - \frac{\alpha^2\beta^2}{\mu},\end{aligned}\right.$$

et il faut, entre ces deux équations, éliminer μ. La première donne deux valeurs pour $\sqrt{\mu}$.

1° $\sqrt{\mu} = \beta \frac{a}{b}$. Cette valeur doit être rejetée; car, substituée dans la deuxième des équations (5), elle conduit à $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$, qui n'est autre chose que l'ellipse donnée.

2° $\sqrt{\mu} = \alpha \frac{b}{am}$. Celle-ci donne

$$\frac{\alpha^2}{a^2 m^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 m^2 + b^2}.$$

Telle est l'équation du lieu demandé. C'est une hyperbole homofocale à l'ellipse donnée.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1038

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 336);

PAR M. LÉON LECORNU,
Élève du lycée de Caen.

Étant donnés en grandeur les quatre côtés d'un quadrilatère plan et la droite qui unit les milieux de deux côtés opposés, trouver l'aire du quadrilatère en fonction de ces cinq droites. Discussion du problème.

Soient ABCD le quadrilatère, S sa surface, MN la droite qui unit les milieux des côtés AC et BD. Prolongeons ces deux côtés jusqu'à leur rencontre au point O, appelons θ leur angle, et posons

$$OM = x,\quad ON = y,\quad MA = c,\quad NB = d,\quad AB = a,$$
$$CD = a',\quad MN = b;$$

nous avons les relations suivantes :

$$2S = [(x+c)(y+d)-(x-c)(y-d)]\sin\theta = 2(dx+cy)\sin\theta,$$

d'où

(1) $$S = (dx+cy)\sin\theta,$$

(2) $$x^2+y^2-2xy\cos\theta = b^2,$$

(3) $$(x-c)^2+(y-d)^2-2(x-c)(y-d)\cos\theta = a^2,$$

(4) $$(x+c)^2+(y+d)^2-2(x+c)(y+d)\cos\theta = a'^2.$$

Les équations (3) et (4) peuvent s'écrire

$$(c^2+d^2)-2(cx+dy)+2(dx+cy-cd)\cos\theta = a^2-b^2,$$
$$(c^2+d^2)+2(cx+dy)-2(dx+cy+cd)\cos\theta = a'^2-b^2,$$

ou, en ajoutant et retranchant successivement ces deux équations membre à membre,

(5) $$2(c^2+d^2)-4cd\cos\theta = a^2+a'^2-2b^2,$$

(6) $$4(cx+dy)-4(dx+cy)\cos\theta = a'^2-a^2.$$

De l'équation (5) on tire

$$\cos\theta = \frac{2(c^2+d^2)-(a^2+a'^2-2b^2)}{4cd}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$c-d\cos\theta = m,$$
$$d-c\cos\theta = n,$$

l'équation (6) devient

$$4mx+4ny = a'^2-a^2,$$

d'où

$$y = \frac{a'^2-a^2-4mx}{4n}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (2), développant et chassant les dénominateurs, il vient

$$16(m^2+n^2+2mn\cos\theta)x^2-8(a'^2-a^2)(m+n\cos\theta)x$$
$$+(a'^2-a^2)^2-16b^2n^2 = 0;$$

d'où

$$x = \frac{(a'^2 - a^2)(m + n\cos\theta) \pm \sqrt{16(m^2 + n^2 + 2mn\cos\theta)b^2n^2 - (a'^2 - a^2)^2 n^2 \sin^2\theta}}{4(m^2 + n^2 + 2mn\cos\theta)}.$$

Si l'on remplace m et n par leurs valeurs, on a

$$x = \frac{(a'^2 - a^2)c\sin\theta \pm (d - c\cos\theta)\sqrt{16b^2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta) - (a'^2 - a^2)^2}}{4(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta)\sin\theta}.$$

De même on aurait

$$y = \frac{(a'^2 - a^2)d\sin\theta \pm (c - d\cos\theta)\sqrt{16b^2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta) - (a'^2 - a^2)^2}}{4(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta)\sin\theta};$$

par suite

$$S = (dx + cy)\sin\theta = \frac{2(a'^2 - a^2)cd\sin\theta \pm [d(d - c\cos\theta) + c(c - d\cos\theta)]\sqrt{16b^2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta) - (a'^2 - a^2)^2}}{4(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta)},$$

(7) $$S = \frac{(a'^2 - a^2)cd\sin\theta}{2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta)} \pm \frac{1}{4}\sqrt{16b^2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta) - (a'^2 + a^2)^2},$$

ou enfin, en remplaçant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par leurs valeurs en fonction des données,

(8) $$S = \frac{1}{4}\left[\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 + a^2 - 2b^2}\sqrt{(a^2 + a'^2 - 2b^2)(4c^2 + 4d^2 - a^2 - a'^2 + 2b^2) - 4(c^2 - d^2)^2} \pm \sqrt{8b^2(a'^2 + a^2 - 2b^2) - (a'^2 - a^2)^2}\right].$$

Pour que le quadrilatère existe, il faut que $\cos\theta$ soit plus petit que $+1$, c'est-à-dire que l'on ait

$$2(c^2+d^2)-(a^2+a'^2-2b^2)<4cd,$$

ou

$$2(c-d)^2<a^2+a'^2-2b^2.$$

Il faut aussi que $\cos\theta$ soit plus grand que -1, ou

$$2(c+d)^2>a^2+a'^2-2b^2.$$

Il faut enfin que l'on ait

$$8b^2(a'^2+a^2-2b^2)-(a'^2-a^2)^2>0.$$

Si ces trois conditions sont remplies, l'expression (7) est réelle, et par suite il en est de même de l'expression (8).

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1081

(voir 2e série, t. XI, p. 192);

PAR M. L. DESMONS,

Professeur au lycée de Troyes.

Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur; trouver le lieu des milieux de ces cordes. (E. LEMOINE.)

I. L'équation de la corde commune au cercle osculateur et à l'ellipse est

$$(1)\qquad \frac{x}{a}\cos\alpha-\frac{y}{b}\sin\alpha=\cos 2\alpha,$$

α étant le *paramètre angulaire* du point de contact, et le second point d'intersection ayant pour paramètre -3α.

Je pose

$$\alpha=\frac{\pi}{4}-\varphi;$$

l'équation (1) devient alors

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)-\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\sin 2\varphi,$$

ou

$$(2)\qquad \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cos\varphi+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\varphi\cos\varphi,$$

équation de même forme que celle de la normale à l'ellipse.

Si l'on pose

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=p,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=q,$$

on peut l'écrire

$$p+q\,\mathrm{tang}\,\varphi=\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\varphi,\quad \text{ou}\quad p\cot\varphi+q=\frac{4}{\sqrt{2}}\cos\varphi.$$

Dérivant ces deux équations par rapport à φ, on a successivement

$$\cos^3\varphi=\frac{q}{2^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sin^3\varphi=\frac{p}{2^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$(3)\qquad p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=2;$$

telle est l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires.

On peut la mettre sous une forme plus simple en prenant pour axes les diagonales du rectangle des axes. On a, MP et MQ étant les perpendiculaires abaissées sur OX

et OY, et θ étant l'angle XOY des nouveaux axes,

$$MP = Y\sin\theta, \quad MQ = X\sin\theta,$$

$$MP = \frac{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad MQ = \frac{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Ainsi

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -\frac{2Y}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2X}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

et l'équation (3) devient

$$(4) \qquad X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}(a^2+b^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Cette courbe a sur les axes quatre points de rebroussement de première espèce, a, a', b, b'. Elle est symétrique par rapport aux axes de l'ellipse et lui est tangente en ses quatre sommets. Les points a, a', b, b' sont sur un cercle de rayon $\sqrt{2(a^2+b^2)}$, facile à construire.

II. Les coordonnées du point milieu de la corde sont, en prenant pour axes les axes de l'ellipse,

$$(5) \qquad \begin{cases} x = a\dfrac{(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2}, \\ y = b\dfrac{(\sin\alpha - \sin 3\alpha)}{2}, \end{cases}$$

ou bien

$$x = a\cos\alpha\cos 2\alpha,$$
$$y = -b\sin\alpha\cos 2\alpha.$$

En élevant au carré ces deux équations et ajoutant, on a

$$\cos^2 2\alpha = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

donc

$$\cos\alpha = \frac{\frac{x}{a}}{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin\alpha = \frac{-\frac{y}{b}}{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

En introduisant ces valeurs dans

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

il vient

$$(6) \qquad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

Cette courbe a pour équation, en coordonnées polaires,

$$(7) \qquad \rho = \frac{\frac{\cos^2\omega}{a^2}-\frac{\sin^2\omega}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right)^3}}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux axes; l'origine est un point quadruple dont les tangentes ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0:$$

ce sont les diagonales du rectangle des axes. Si l'on construit l'hyperbole qui a pour axes $2a$, $2b$, l'équation (7) donne une propriété des rayons des trois courbes

$$(8) \qquad \rho\rho''^2 = \rho'^3,$$

ρ, ρ' et ρ'' désignant les rayons de la courbe, de l'ellipse et de l'hyperbole correspondant à un même angle ω.

III. L'équation de l'enveloppe des cordes communes en coordonnées tangentielles s'obtient aisément. L'équation de la corde commune (2) peut, en effet, s'écrire,

dans le système des axes OX, OY,

$$(9)\qquad -\frac{Y\cos\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{X\sin\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\varphi\cos\varphi \quad (*),$$

et, en désignant par u, v les coordonnées tangentielles de cette droite, on a

$$\frac{1}{u}=\cos\varphi\sqrt{2(a^2+b^2)},$$

$$\frac{1}{v}=-\sin\varphi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

On tire de là l'équation de la courbe

$$(10)\qquad \frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=2(a^2+b^2);$$

elle est donc de quatrième classe.

N. B. — Voici comment M. Hilaire, professeur à Douai, trouve l'équation de l'enveloppe dont il s'agit :

« L'équation

$$(1)\qquad \frac{x}{a}\cos\alpha-\frac{y}{b}\sin\alpha=\cos 2\alpha$$

de la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)(\cos\alpha-\sin\alpha)+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)(\cos\alpha+\sin\alpha)$$
$$=2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$

ou

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\sin(\alpha+45^\circ)}+\frac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}{\cos(\alpha+45^\circ)}=2^{\frac{3}{2}},$$

(*) Plus simplement, en posant $K=\sqrt{2(a^2+b^2)}$,

$$\frac{X}{\cos\varphi}-\frac{Y}{\sin\varphi}=K.$$

équation de la forme

$$\frac{X}{\sin\theta} + \frac{Y}{\cos\theta} = c.$$

» Or on sait que l'enveloppe de la droite représentée par cette dernière équation a pour équation

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}};$$

donc, par analogie, l'enveloppe qui nous occupe a pour équation

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.$$

» Cet ingénieux artifice de calcul est indiqué par M. Salmon (*Higher plane Curves*, p. 106). »

Note. — La question 1081 a aussi été résolue par MM. Moret-Blanc; Moreau, lieutenant d'Artillerie de la Marine; Androuski, étudiant à l'Université de Varsovie; R. de Paolis, étudiant à l'Université de Rome; Chervet, élève du lycée de Moulins; Gambey; Pellissier; Brocard; Hilaire; Lenglet, Lez et Kœhler.

Question 1088

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Trouver l'aire de l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur.

(L. DESMONS.)

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse, et ω le paramètre angulaire du point de contact d'un cercle osculateur. Les coordonnées de ce point sont

$$x_1 = a\cos\omega, \quad y_1 = b\sin\omega.$$

La corde commune au cercle et à l'ellipse, ayant même

inclinaison sur les axes que la tangente commune, a pour équation

$$y - b\sin\omega = \frac{b\cos\omega}{a\sin\omega}(x - a\cos\omega),$$

ou

(1) $$bx\cos\omega - ay\sin\omega = ab(\cos^2\omega - \sin^2\omega),$$

dont la dérivée par rapport à ω est

(2) $$bx\sin\omega + ay\cos\omega = 4ab\sin\omega\cos\omega.$$

L'élimination de ω entre ces deux équations donnerait celle de l'enveloppe; cette équation a été trouvée (question 1081). Il vaut mieux, pour l'objet qui nous occupe, tirer des équations (1) et (2) les coordonnées d'un point de la courbe. Il vient

$$x = a(\cos^3\omega + 3\sin^2\omega\cos\omega),$$
$$y = b(\sin^3\omega + 3\sin\omega\cos^2\omega),$$

d'où

$$dx = 3a(\sin\omega\cos^2\omega - \sin^3\omega)\,d\omega.$$

De $\omega = 0$ à $\omega = \frac{\pi}{4}$, dx est positif, et l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x est extérieure à la courbe. De $\omega = \frac{\pi}{4}$ à $\omega = \frac{\pi}{2}$, dx est négatif, et l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x se compose de l'aire précédente, plus le quart de l'aire cherchée. En appelant A l'aire totale de l'enveloppe, on aura donc $\frac{A}{4}$ en intégrant, de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $-y\,dx$ exprimé en fonction de ω et $d\omega$, ce qui donne

$$\frac{A}{4} = 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\omega + 3\sin\omega\cos^2\omega)(\sin^3\omega - \sin\omega\cos^2\omega)\,d\omega$$

$$= 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^6\omega - 3\cos^4\omega + 2\sin^4\omega - \sin^6\omega)\,d\omega;$$

et, en remarquant que, de o à $\frac{\pi}{2}$, $\sin^2\omega$ et $\cos^2\omega$ passent en sens inverse par les mêmes valeurs, l'expression précédente se réduit à

$$\frac{A}{4} = 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^6\omega - \cos^4\omega)\,d\omega$$

$$= 3ab\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\pi - \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}\right) = 3ab\frac{\pi}{8},$$

d'où

$$A = \tfrac{3}{2}\pi ab.$$

Cette aire est les $\frac{3}{2}$ de celle de l'ellipse; par suite, l'aire comprise entre la courbe et l'ellipse est la moitié de l'aire de l'ellipse.

Les coordonnées des points de rebroussement sont

$$x = \pm a\sqrt{2}, \quad y = \pm b\sqrt{2}.$$

L'aire du rectangle passant par les quatre points de rebroussement est donc $8ab$, et l'aire comprise entre le périmètre de ce rectangle et la courbe est égale à

$$(8 - \tfrac{3}{2}\pi)ab.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Hilaire, Pellissier, Brocard, Gambey, Androuski, Chervet et Kœhler.

Question 1089

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

Trouver le lieu des pôles des cordes communes et la podaire du centre relative à l'enveloppe des cordes communes à une ellipse et à son cercle osculateur.

(L. DESMONS.)

1. Soient α et β les coordonnées du pôle d'une corde commune

(1) $$bx\cos\omega - ay\sin\omega = ab(\cos^2\omega - \sin^2\omega);$$

sa polaire

(2) $$b^2\alpha x + a^2\beta y = a^2b^2$$

devant être identique à la corde commune, on aura les équations

$$\frac{b\alpha}{\cos\omega} = -\frac{a\beta}{\sin\omega} = \frac{ab}{\cos^2\omega - \sin^2\omega},$$

entre lesquelles il faut éliminer ω. On en tire

$$\frac{b^2\alpha^2}{\cos^2\omega} = \frac{a^2\beta^2}{\sin^2\omega} = \frac{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}{1} = \frac{a^2b^2}{(\cos^2\omega - \sin^2\omega)^2},$$

d'où

$$\cos^2\omega = \frac{b^2\alpha^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$

$$\sin^2\omega = \frac{a^2\beta^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$

et

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = \frac{a^2b^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2}{(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2)^2},$$

ou, en chassant le dénominateur, et écrivant x et y au lieu de α et β,

$$(a^2y^2 - b^2x^2)^2 = a^2b^2(a^2y^2 + b^2x^2).$$

Le lieu est une courbe du quatrième ordre, tangente à l'ellipse aux quatre sommets, et ayant pour asymptotes les diamètres conjugués égaux de l'ellipse indéfiniment prolongés.

2. La perpendiculaire abaissée du centre sur la corde commune

(1) $$bx\cos\omega - ay\sin\omega = ab(\cos^2\omega - \sin^2\omega)$$

a pour équation

$$(2)\qquad ax \sin\omega + by \cos\omega = 0.$$

On aura l'équation de la podaire en éliminant ω entre ces deux équations. De l'équation (2) on tire

$$\frac{a^2x^2}{\cos^2\omega} = \frac{b^2y^2}{\sin^2\omega} = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{1} = \frac{a^2x^2 - b^2y^2}{\cos^2\omega - \sin^2\omega},$$

d'où

$$\cos\omega = \pm\frac{ax}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}}, \quad \sin\omega = \mp\frac{by}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), et élevant les deux membres au carré, on a

$$(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) = (a^2x^2 - b^2y^2)^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^2 = \frac{(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}.$$

La courbe se compose de quatre feuilles symétriques par rapport aux axes, tangentes à l'ellipse aux quatre sommets, et ayant pour tangentes au centre les droites $y = \pm\frac{a}{b}x$, c'est-à-dire les perpendiculaires aux diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

Note. — La même question a été résolue par MM. Brocard, Hilaire, Kœhler, Pellissier, Gambey, Chervet, R. de Paolis, étudiant à l'Université de Rome.

Question 1090

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

Par M. A. PELLISSIER,
Capitaine d'Artillerie.

Le triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde du cercle osculateur en un point

de l'ellipse est équivalent au triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde de l'ellipse perpendiculaire au grand axe, menée au point dont le paramètre angulaire est double de celui du point de contact. Maximum de l'aire de ce triangle. Maximum de la longueur de la corde commune. (L. DESMONS.)

Soit MN la corde commune à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et au cercle osculateur en M. Le paramètre angulaire (ou angle excentrique), étant égal à α en ce dernier point, sera au point N égal à -3α.

La surface du triangle OMN, dont le sommet O est le centre de l'ellipse, sera donnée par la formule

$$2S=\begin{vmatrix} b\sin\alpha & a\cos\alpha \\ -b\sin3\alpha & a\cos3\alpha \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\sin3\alpha & \cos3\alpha \end{vmatrix}$$
$$=ab(\sin\alpha\cos3\alpha+\cos\alpha\sin3\alpha)=ab\sin4\alpha.$$

Celle du second triangle de l'énoncé sera donnée par

$$2S'=\begin{vmatrix} b\sin2\alpha & a\cos2\alpha \\ -b\sin2\alpha & a\cos2\alpha \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} \sin2\alpha & \cos2\alpha \\ -\sin2\alpha & \cos2\alpha \end{vmatrix}$$
$$=2ab\sin2\alpha\cos2\alpha=ab\sin4\alpha.$$

Ces deux surfaces sont donc bien égales.

Maximum de l'aire de ce triangle. — Le maximum de S aura lieu évidemment pour

$$\sin4\alpha=1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha=\frac{\pi}{8}.$$

L'aire est alors égale à $\frac{ab}{2}$, ou au huitième du rectangle des axes.

Maximum de la longueur de la corde commune. — La corde MN a pour équation

$$\frac{x}{a}\cos\alpha - \frac{y}{b}\sin\alpha = \cos 2\alpha;$$

en appelant L sa longueur et p la perpendiculaire OP abaissée du sommet sur la base du triangle OMN, on aura

$$2S = pL;$$

donc

$$L = \frac{2S}{p};$$

d'ailleurs

$$p = \frac{ab\cos 2\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}},$$

et par suite

$$L = 2\sin 2\alpha\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Pour avoir le maximum, il suffit d'égaler à zéro la dérivée par rapport à α; on trouve ainsi

$$4\cos 2\alpha\,(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha) + c^2\sin^2 2\alpha = 0.$$

Remplaçant $\cos 2\alpha$ et $\sin 2\alpha$ par leurs valeurs en $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, on arrive, toutes réductions faites, à l'équation

$$a^2\,\mathrm{tang}^4\alpha - 2c^2\,\mathrm{tang}^2\alpha - b^2 = 0,$$

d'où

$$\mathrm{tang}^2\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 + a^2b^2}}{a^2}.$$

Le signe + convient seul au radical, puisque $\mathrm{tang}^2\alpha$ doit être positif; donc les valeurs de α correspondant au maximum sont données par

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \pm\frac{1}{a}\sqrt{c^2 + \sqrt{c^4 + a^2b^2}}.$$

On a donc pour α quatre valeurs, ce qui est évident à cause de la symétrie.

La valeur correspondante de L sera égale à

$$\frac{4a^2 K (b^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + K^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où l'on a posé

$$K^2 = c^2 + \sqrt{c^4 + a^2 b^2}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Brocard, Hilaire, Gambey, Moret-Blanc, Androuski, Chervet, Lez et R. de Paolis, étudiant à l'Université de Rome.

Question 1094

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 479);

PAR M. V. JAMET,
Élève du lycée de Bordeaux (classe de M. de Lagrandval).

On donne deux coniques dont l'une est fixe et dont l'autre se meut autour du foyer commun. Démontrer que le lieu du point de concours des tangentes communes est un cercle. Si, pour une certaine position de la conique mobile, les tangentes communes sont parallèles, elles le seront pour toutes les positions de cette dernière conique. (E. LEMOINE.)

Soient F le foyer commun, F″ le second foyer de la conique mobile, F′ le second foyer de la conique fixe. Abaissons FA, FB, F′C, F′D et F″E, F″G perpendiculaires sur les tangentes communes. On a, en appelant b et b' les demi-axes non focaux des deux coniques,

$$FA \times F'C = b^2,$$
$$FA \times F''E = b'^2;$$

d'où

$$\frac{F'C}{F''E} = \frac{b^2}{b'^2}.$$

De même

$$\frac{F'D}{F''G} = \frac{b^2}{b'^2};$$

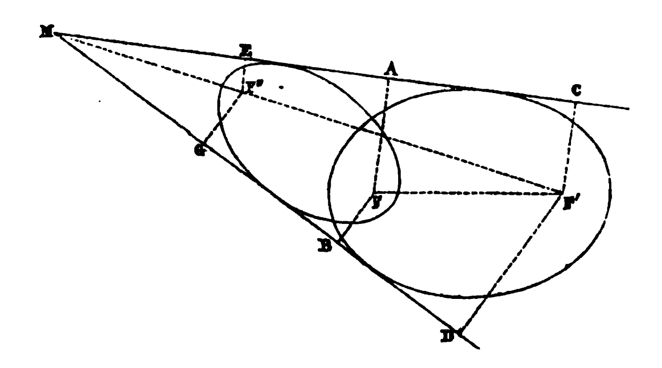
d'où

$$\frac{F'C}{F''E} = \frac{F'D}{F''G}.$$

Les trois points F', F'', M sont donc en ligne droite. De plus, on a

$$\frac{F'M}{F''M} = \frac{F'C}{F''E} = \frac{b^2}{b'^2}.$$

Or le lieu du point F'' est un cercle décrit du point F comme centre avec la longueur FF'' pour rayon; et le lieu du point M qui, d'après l'égalité précédente, est ho-



mothétique par rapport à F' du lieu du point F'', est un cercle dont le centre se trouvera sur F'F à une distance d de F', telle qu'on aura, en appelant c et c' les demi-

distances focales des deux coniques,

$$\frac{d}{d-2c}=\frac{b^2}{b'^2},$$

ou bien

$$d=\frac{2b^2c}{b^2-b'^2}.$$

De même le rayon R sera donné par l'équation

$$R=\frac{2b^2c'}{b^2-b'^2}.$$

Si, pour une certaine position de la conique mobile, les deux tangentes communes sont parallèles entre elles, elles seront aussi parallèles à la droite F'F″ qui passe par leur point de concours, et l'on aura

$$F'C=F''E \quad \text{ou bien} \quad F'C\times FA=F''E\times FA,$$

ou encore

$$b^2=b'^2.$$

Il en résulte que, pour une position quelconque de la conique, on aura

$$F'C\times FA=F''E\times FA,$$

ou

$$F'C=F''E.$$

De même, on aura

$$F'D=F''G,$$

et les deux tangentes communes, étant parallèles à FF″, seront parallèles entre elles.

Note. — Solutions analytiques de MM. G. Launoy et Gambey.

Question 1095

(voir 2e série, t. XI, p. 479);

PAR M. H. LEZ.

Le minimum d'une tangente à l'ellipse, comprise entre les axes, est égal à la demi-somme $(a+b)$ des axes.

La tangente à l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, en un point dont l'abscisse est μ, a pour équation

$$y=\frac{b}{a\sqrt{a^2-\mu^2}}(-\mu x+a^2);$$

elle rencontre l'axe des X à une distance $\frac{a^2}{\mu}$ de l'origine et l'axe des Y à une distance $\frac{ab}{\sqrt{a^2-\mu^2}}$.

Par suite, la longueur de la tangente, comprise entre les axes, est exprimée par

$$l^2=\frac{a^4}{\mu^2}+\frac{a^2b^2}{a^2-\mu^2} \quad \text{ou} \quad l=\sqrt{\frac{a^2(a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2)}{a^2\mu^2-\mu^4}}.$$

Cherchant maintenant les valeurs de μ qui annulent la dérivée du radical ou

$$l'=\frac{a(b^2\mu^4-a^2\mu^4+2a^4\mu^2-a^6)}{\mu^2(a^2-\mu^2)\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2)}},$$

on aura celles qui rendent la fonction l minimum; elles sont les racines de l'équation

$$b^2\mu^4-a^2\mu^4+2a^4\mu^2-a^6=0 \quad \text{ou} \quad \mu=\pm a\sqrt{\frac{a}{a\pm b}}.$$

Or la valeur de μ, qui répond à la question, est

$$a\sqrt{\frac{a}{a+b}} < a;$$

car la dérivée reste négative pour $\mu < a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

Transportant cette valeur dans l'expression de l^2, on a

$$l = a + b \text{ (*)}.$$

C. Q. F. T.

Note. — Cette question a été résolue, de même, par MM. H. Heldermann, ancien élève de l'École Polytechnique de Delft; Pierre Arnould, élève du collége Stanislas; Kruschwitz, de Berlin; A. Tourrettes, surveillant général au lycée d'Albi; Moret-Blanc.

Question 1096

(voir 2e série, t. XI, p. 479)

PAR M. H. LEZ.

Le maximum de la distance du point de contact d'une tangente à l'ellipse à la projection du centre sur cette tangente est égal à la demi-différence $(a-b)$ *des axes.*

La tangente à l'ellipse $a^2y + b^2x^2 = a^2b^2$, en un

(*) On arrive au même résultat par le calcul suivant. En désignant par $y = mx + n$ l'équation de la tangente, on a

$$l^2 = n^2 + \frac{n^2}{m^2} = a^2m^2 + b^2 + a^2 + \frac{b^2}{m^2}.$$

Mais le produit de a^2m^2 par $\frac{b^2}{m^2}$ étant une quantité constante a^2b^2, le minimum de la somme $a^2m^2 + \frac{b^2}{m^2}$ est $2ab$. Donc le minimum de l^2 est $2ab + b^2 + a^2$, ou $(a+b)^2$. (G.)

point dont l'abscisse est μ, a pour équation

$$y = \frac{b}{a\sqrt{a^2-\mu^2}}(-\mu x + a^2),$$

et la perpendiculaire abaissée de l'origine est représentée par

$$y = \frac{a\sqrt{a^2-\mu^2}}{\mu b}x.$$

De ces deux équations, on tire facilement les coordonnées du point de rencontre des deux droites; elles sont

$$x_1 = \frac{a^2b^2\mu}{a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{a^3b\sqrt{a^2-\mu^2}}{a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2}.$$

Or, le point de contact ayant pour coordonnées

$$x_2 = \mu, \quad y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\mu^2},$$

la longueur du segment intercepté sur la tangente aura pour expression

$$l^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2,$$

ou

$$l^2 = \frac{b^2\mu^4(a^2-b^2)^2(a^2-\mu^2) + a^2\mu^2(a^2-b^2)^2(a^2-\mu^2)^2}{a^2(a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2)^2},$$

et

$$l = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2(a^2-\mu^2)\mu^2}{(a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2)a^2}}.$$

Cherchant maintenant les valeurs qui annulent la dérivée du radical ou

$$l' = \frac{(a^2-b^2)(a^2\mu^4-b^2\mu^4-2a^4\mu^2+a^6)}{a(a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2)\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2)}},$$

on aura celles qui rendent la fonction l maximum;

elles sont, comme dans le cas précédent, les racines de l'équation

$$a^2\mu^4 - b^2\mu^4 - 2a^4\mu^2 + a^6 = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = \pm a\sqrt{\frac{a}{a \pm b}}.$$

Or la valeur de μ, qui répond à la question, est encore

$$a\sqrt{\frac{a}{a+b}} < a;$$

car la dérivée reste positive pour $\mu < a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

Transportant cette valeur dans l'expression de l^2, on trouve

$$l = a - b.$$

C. Q. F. T. (*).

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; Pierre Arnould, élève du collége Stanislas; A. Tourrettes, surveillant général au lycée d'Albi; Moret-Blanc.

(*) La question 1096 se ramène à la précédente 1095, en remarquant que le produit d'une tangente comprise entre les axes, par la distance du point de contact à la projection du centre sur cette tangente, est une quantité invariable égale à $a^2 - b^2$. Cette proposition s'établit facilement; car soient A, B les points où la tangente coupe les axes OX, OY; C le point de contact; D la projection du centre sur la tangente; E l'intersection de l'axe OX et d'une normale menée au point C, et OP la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur cette normale. La similitude des triangles rectangles AOB et OPE donne

$$\frac{AB}{OE} = \frac{OA}{OP},$$

d'où

$$AB \times OP = OE \times OA;$$

mais

$$OP = CD;$$

donc

$$AB \times CD = OE \times OA = a^2 - b^2.$$

Le minimum de la tangente étant $a + b$, le maximum de la distance CD est nécessairement $a - b$. (G.)

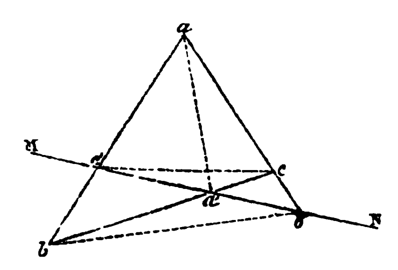
Question 1103

(voir 2ᵉ série, t. XI, p 527);

PAR M. PELLISSIER,
Capitaine d'Artillerie.

Si a, b, c désignent les sommets d'un triangle et a', b', c' les traces, sur les côtés opposés, des polaires de ces sommets par rapport à une conique, les cercles décrits sur aa', bb', cc' comme diamètres se coupent aux mêmes points. (H. FAURE.)

Soit ABC le triangle polaire réciproque de *abc* par rapport à la conique; on sait que les lignes A*a*, B*b*, C*c* se coupent en un même point; donc les intersections *a'*,



b', *c'* des côtés de ABC avec les côtés de *abc* sont sur une droite MN. Or, dans la figure formée par le triangle *abc* et la transversale MN, nous avons un quadrilatère *aca'c'* dont *aa'* et *cc'* sont les diagonales, et *bb'* la ligne qui joint les points de rencontre des côtés opposés. Donc (*Géométrie supérieure,* nº 345) les circonférences décrites sur *aa'*, *bb'*, *cc'* comme diamètres se coupent aux mêmes points.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Gambey.

TABLE DES MATIÈRES.

Janvier 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Mar 5

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

FÉVRIER 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE

RÉDIGÉ PAR

M. GERONO,
Professeur de Mathématiques,

ET

M. CH. BRISSE,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1873 est en cours de publication.

On ne peut s'abonner que pour l'année entière.

L'abonnement est augmenté de 3 francs à partir de l'année 1869, et les prix pour les divers pays se trouvent dorénavant fixés ainsi qu'il suit :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Égypte, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Portugal, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége, Suède	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861), au lieu de 240 francs, 200 francs payables de la manière suivante : 100 francs comptant, et les 100 francs restants en un bon à trois mois à l'ordre de M. Gauthier-Villars, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes.

Les tomes X et XVI à XX (1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.

Les autres tomes de la première série se vendent séparément...... 12 fr.

La **DEUXIÈME SÉRIE**, commencée en 1862, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les tomes I à V (1862 à 1866) ne se vendent pas séparément.

Les tomes suivants de la première série se vendent séparément... 15 fr

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Calcul infinitésimal, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux, par *J. Hoüel*, 1871-1872; deux Parties, in-4°, de 376-336 pages, lithographiées. Prix : 20 fr. (La seconde Partie se vend séparément : 10 fr.)

Le plan général de cet Ouvrage s'écarte en quelques points du plan adopté dans la plupart des Traités d'Analyse. L'auteur a renoncé à la division ordinaire du Calcul infinitésimal en Calcul différentiel et Calcul intégral. Cette division n'a pas pour raison le degré de difficulté de ces deux branches, les commencements du Calcul intégral étant beaucoup plus faciles que certaines applications du Calcul différentiel. En séparant les deux opérations, inverses l'une de l'autre, la différentiation et l'intégration on s'interdit de nombreuses et notables simplifications dans l'établissement des propositions fondamentales, et l'on se condamne à scinder certaines théories, qui se rattachent naturellement à l'objet du Calcul différentiel, mais dans lesquelles l'usage de l'intégration est nécessaire.

Le caractère dominant de ce Cours, c'est le soin avec lequel l'auteur a développé tout ce qui touche aux fondements de la méthode infinitésimale. Bien que la légitimité et la rigueur de cette méthode eussent été mises hors de doute depuis longtemps par les travaux de Carnot, de Cauchy, de Duhamel, il semble cependant que beaucoup de Traités classiques ne l'emploient qu'avec timidité, en changeant sa dénomination en celle de *méthode des limites ;* comme si ces deux méthodes ne découlaient pas des mêmes principes, et différaient autrement que par des détails de forme. Convaincu, par son expérience de l'enseignement, de la nécessité d'aborder franchement les difficultés apparentes, et de se rapprocher autant que possible, dans les développements théoriques, de la voie indiquée tant par l'instinct

universel que par la pratique, l'auteur a pris pour point de départ le mode d'exposition suivi par M. Duhamel dans la première édition de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1840-1841). Il lui a paru peu naturel de commencer par définir la différentielle d'une fonction comme une partie seulement de l'accroissement infiniment petit de cette fonction, cette conception artificielle pouvant jeter quelque obscurité sur certains points, par exemple, sur la définition des différentielles totales des divers ordres d'une fonction de plusieurs variables, sur la question du changement de la variable indépendante, etc. On ne tarde pas, du reste, à reconnaître que les deux points de vue sont identiques, à la forme près; mais l'on n'a plus à craindre la confusion entre l'*infiniment petit* et le *très-petit*, que l'emploi de deux lettres, *d* et Δ, pour désigner successivement les mêmes accroissements, peut faire naître dans certains esprits. Si l'on évite, au début, de traiter à fond certaines questions réputées délicates, les difficultés devant lesquelles on a d'abord reculé se représentent inévitablement plus tard, dans des cas où la complication du sujet rend leur solution difficile. C'est là la source de tous les paradoxes qui embarrassent encore tant de bons esprits. En s'habituant dès le commencement à l'emploi du langage de la méthode infinitésimale, auquel on est forcé tôt ou tard de recourir dans les applications, comme l'auteur de la *Mécanique analytique* en a lui-même donné l'exemple, on n'est pas exposé à mettre en suspicion la rigueur d'un mode de raisonnement dont on a appris à contrôler l'exactitude dans l'exposition des premiers principes.

Le contenu de l'Ouvrage de M. Hoüel correspond à peu près au programme de la licence ès Sciences mathématiques, sauf l'addition de quelques suppléments, qu'exigeaient les progrès récents de la Science. Voici un aperçu de la Table des matières avec l'indication des numéros des Leçons correspondantes.

PREMIÈRE PARTIE.

Introduction. — (1-6). Premières notions sur les déterminants.

Calcul infinitésimal. — (1-3). Généralités. Principe des limites. Infiniment petits, infiniment grands. Principes fondamentaux sur la substitu-

tion des infiniment petits. Dérivées. — (4-8). Différentielles des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Intégrales définies et indéfinies. Méthodes générales de différentiation et d'intégration; application aux principales fonctions simples. — (9-12). Infiniment petits des divers ordres. Dérivées et différentielles d'ordre supérieur; leur calcul direct. Différentielles et dérivées partielles des divers ordres des fonctions de plusieurs variables. Changement de variables. — (13-16). Relations entre les accroissements des fonctions et les valeurs moyennes des dérivées. Théorèmes de Taylor et de Maclaurin; leur application au développement des fonctions en séries. Théorèmes sur les séries de puissances entières et positives. Développement en séries au moyen de l'intégration. Coefficients indéterminés. — (17). Valeurs limites dans les cas d'indétermination apparente. — (18-19). Maxima et minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables. — (20-23). Décomposition en fractions simples et intégration des fonctions rationnelles. Irrationnelles du second degré. Formules de réduction successive des intégrales des fonctions algébriques et transcendantes. — (24-26). Remarques sur le passage des intégrales indéfinies aux intégrales définies. Différentiation et intégration sous le signe $\int$. Calcul des intégrales définies spéciales. Intégrales eulériennes. — (27-29). Tangentes et normales aux courbes planes. Asymptotes rectilignes. Longueur d'un arc de courbe. Angle de contingence; sens de la concavité. — (30-33). Courbure des courbes planes. Contacts des divers ordres; courbes osculatrices. Développées. Enveloppes. — (34-35). Tangente, plan normal, plan osculateur aux courbes dans l'espace. Plan tangent, normale, lignes de niveau et de plus grande pente des surfaces courbes. — (36-41). Théorèmes de Géométrie infinitésimale; double courbure des lignes non planes; développées. Étude d'une surface en un point donné. Rayons de courbure principaux en un point quelconque. Lignes de courbure, lignes asymptotiques, lignes géodésiques; théorème de Dupin. Applications à l'hélice et aux hélicoïdes. Contacts des lignes et des surfaces. — (42-44). Quadratures, rectifications, cubatures. Centres de gravité, moments d'inertie. — (45). Déterminants fonctionnels. Changement de variables dans les intégrales multiples.

Additions : Calcul approché des quadratures. — Série de Lagrange pour le développement des fonctions implicites.

SECONDE PARTIE.

(1). Intégration des différentielles du premier ordre à plusieurs variables indépendantes. — (2-3). Formation des équations différentielles par l'élimination des constantes arbitraires. — (4). Nouvelle démonstration du théorème, que toute équation différentielle d'ordre quelconque admet une intégrale générale. — (5-9). Principales méthodes d'intégration pour les équations différentielles du premier ordre. Application à la recherche des formules d'addition des transcendantes. Théorie du multiplicateur. Équations où la différentielle entre à un degré supérieur au premier.

Solutions singulières. Méthode de P.-H. Blanchet pour distinguer les solutions singulières des intégrales particulières. — (10). Intégration et cas d'abaissement des équations différentielles d'ordre supérieur. — (11-13). Théorie des équations différentielles linéaires. — (14-16). Équations différentielles simultanées. Intégration des équations linéaires. — (17). Équations aux différentielles totales du premier ordre et du premier degré entre trois variables. — (18-19). Formation des équations aux dérivées partielles par l'élimination des fonctions arbitraires. Équations aux dérivées partielles des principales familles de surfaces. — (20-21). Surfaces enveloppes. Formation des équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes; exemples d'intégration. — (22-24). Équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas de deux variables indépendantes. Équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre quelconque. — (25-27). Calcul des variations des intégrales simples. — (28-30). Mesure de la courbure des surfaces. Coordonnées curvilignes. Triangles géodésiques. Applications à l'ellipsoïde.

APPENDICE : ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES QUANTITÉS COMPLEXES.

(1). Théorie générale des opérations. — (2). Des quantités négatives. — (3-5). Définition des quantités complexes. Addition et soustraction. Multiplication et division, puissances entières et fractionnaires. Toute équation algébrique a une racine réelle ou complexe. Fonctions exponentielles et circulaires, logarithmes. — (6). Fonctions d'une variable complexe. Fonctions monogènes. — (7-9). Intégration le long du contour d'une aire donnée. Théorème de Cauchy. Résidus. Représentation d'une fonction synectique sous forme d'un résidu. Théorèmes de Cauchy et de Laurent sur le développement des fonctions en séries de puissances. Étude d'une fonction dans le voisinage d'un point. Indices. Décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples. — (10-11). Séries de Bürmann et de Lagrange. Calcul des intégrales définies. — (12). Application de la théorie des quantités complexes à la Géométrie analytique.

Cours de Physique mathématique, par M. *Émile Mathieu,* professeur à la Faculté des Sciences de Besançon. Un volume in-4; 1873. Prix : 15 francs.

La Physique mathématique est une branche de la Science qui a été créée en France, mais qui n'est presque plus cultivée dans notre pays; cela tient en grande partie à ce que ceux qui désireraient l'étudier ne trouvent pas d'ouvrages qui puissent les diriger dans leurs travaux.

M. Mathieu vient de combler cette lacune, en publiant un

Traité didactique sur les méthodes d'intégration en Physique mathématique. Ces intégrations se rencontrent dans les théories de la chaleur, de l'élasticité, de l'acoustique, de l'électricité, et les physiciens eux-mêmes sont obligés de s'appuyer sur les formules qu'on en déduit.

M. Mathieu a rangé les questions qu'il a traitées, non suivant les théories physiques auxquelles elles appartiennent, mais suivant l'ordre dans lequel elles se présentent d'après les intégrations.

La *Théorie mathématique de la Chaleur* de Poisson et, à plus forte raison, la *Théorie analytique de la Chaleur* de Fourier ne sont plus à la hauteur de la Science. Les découvertes de Lamé sur les intégrations de la Physique mathématique sont répandues dans quatre ouvrages qu'il a publiés (*); mais il n'est pas toujours revenu sur les recherches de ses prédécesseurs. Aussi, aujourd'hui, pour connaître les méthodes d'intégration en Physique mathématique, faut-il lire, outre des Mémoires détachés, l'ouvrage de Fourier, celui de Poisson et ceux de Lamé.

Le livre de M. Mathieu rend donc un service évident.

On vient, il est vrai, de faire paraître en Allemagne un ouvrage de Riemann sur le même sujet : *Méthodes d'intégration en Physique mathématique;* mais ce Livre, publié après sa mort, ne fait que reproduire les leçons du savant professeur et ne peut avoir les développements qui auraient été donnés à un Traité proprement dit.

Le Chapitre I du *Cours de Physique mathématique* de M. Mathieu traite de l'emploi des séries trigonométriques, introduites pour la première fois dans l'Analyse par la théorie de la corde vibrante; il contient l'historique complet de la corde vibrante, à la théorie de laquelle travaillèrent tous les grands géomètres de l'époque, et il montre ensuite la nouvelle importance que

---

(*) *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes;* in-8, 1857. — *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications;* in-8, 1859. — *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur;* in-8, 1859. — *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides;* 2e édition, in-8, 1866.

donne Fourier à ces séries, en les employant pour représenter des fonctions discontinues.

Le Chapitre II, relatif aux surfaces isothermes et aux coordonnées curvilignes, donne sur ces belles théories de Lamé tout ce qui est nécessaire pour le sujet du Livre. A la fin du Chapitre se trouve un article publié autrefois par l'auteur sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires, et qui a été signalé plusieurs fois à l'Académie des Sciences par M. de Saint-Venant.

Dans le Chapitre III, l'auteur étudie l'équilibre de température des cylindres. Cette question a été traitée dans les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* de Lamé; mais M. Mathieu y a apporté des perfectionnements en reprenant le plus souvent les questions mêmes de Lamé. C'est lui qui a reconnu le premier que les équations aux différences partielles de la Physique, mises en coordonnées curvilignes, peuvent devenir fausses sur certaines surfaces; alors les intégrations qu'on en déduit sont également fausses. Il montre comment on doit résoudre cette difficulté.

Le Chapitre IV renferme des recherches sur les équations différentielles linéaires du second ordre, utiles dans la Physique mathématique, et reproduit, avec des simplifications notables, les recherches de Sturm.

Le Chapitre V traite de la théorie du mouvement vibratoire des membranes; c'est un sujet qui a été spécialement étudié par l'auteur; il y donne avec développement la théorie du mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique qu'il avait publiée en 1868 dans le tome XIII (2[e] série) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville.

Le Chapitre VI a pour objet la distribution de la chaleur dans une sphère; cette question a été traitée par Laplace et Poisson; l'auteur y ajoute peu au fond; mais l'exposition en était difficile et mérite d'être remarquée.

Le Chapitre VII traite de la distribution de la chaleur dans un milieu indéfini et des températures du globe terrestre. On y voit les principaux résultats des recherches de Laplace, Poisson, Fourier.

L'auteur y résout certains problèmes d'Analyse par des formules plus simples que celles données avant lui.

Le Chapitre VIII est relatif à l'équilibre de température de l'ellipsoïde. C'est une question qui avait été entièrement résolue par Lamé. Mais l'auteur en a changé l'exposition en usant de réflexions générales auxquelles il a été conduit par le sujet de son Livre et en profitant de recherches faites par Jacobi et par M. Liouville.

Le Chapitre IX traite du refroidissement d'un ellipsoïde planétaire. Cette question difficile appartient entièrement à l'auteur et renferme des résultats très-curieux au point de vue de l'Analyse.

M. Serret a présenté l'Ouvrage de M. Mathieu à l'Académie des Sciences, et voici les paroles qu'il a prononcées à cette occasion : « Le livre dont M. E. Mathieu a tenu à faire hommage à l'Académie tire son origine des leçons professées par l'auteur dans un cours complémentaire institué à la Sorbonne, il y a quelques années, par M. le Ministre de l'Instruction publique. M. Mathieu a pleinement justifié la confiance qui lui fut témoignée en cette occasion, et l'Ouvrage, dans lequel il publie aujourd'hui le résultat de ses études sur les méthodes d'intégration usitées dans les recherches de Physique mathématique, est appelé, sans nul doute, à rendre d'importants services aux personnes qui s'occupent de cette branche des Mathématiques appliquées. »

RECHERCHES ANALYTIQUES

sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

(suite, voir 2e série, t. XI, p. 418);

PAR M. LAGUERRE.

V. — *Digression sur les covariants doubles des formes binaires.*

29. Comme, dans tout ce qui suit, les covariants doubles des formes u et ω se présentent très-fréquemment,

les considérations suivantes, quoique très-simples, ne paraîtront peut-être pas inutiles.

Soient les formes $u(x,y)$ et $\omega(x,y)$, dans lesquelles j'ai, pour un instant, substitué aux variables t et τ de nouvelles variables x et y.

On a évidemment, en conservant les notations précédentes,

$$u(tx+t'y, \tau x+\tau' y) = ux^4 + 4\mathcal{C}'x^3y + 6\mathcal{C}_0 x^2y^2 + 4\mathcal{C}xy^3 + u'y^4,$$

et de même

$$\omega(tx+t'y, \tau x+\tau' y) = \omega x^4 + 4\mathfrak{F}'x^3y + 6\mathfrak{F}_0 x^2y^2 + 4\mathfrak{F}xy^3 + \omega' y^4,$$

en posant

$$\mathfrak{F}' = t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2\tau + 3\gamma t\tau^2 + \delta\tau^3) + \tau'(\beta t^3 + 3\gamma t^2\tau + 3\delta t\tau^2 + \varepsilon\tau^3),$$

. . . .

Soit maintenant F un covariant double quelconque de u et de ω; on a, par suite de la définition même des covariants,

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, tx + t'y, \tau x + \tau' y, tx' + t'y', \tau x' + \tau' y') \\ &\quad = (t\tau' - t'\tau)^{-m}\mathrm{F}(u, \mathcal{C}', \ldots, \omega, \mathfrak{F}', \ldots, x, y, x', y'); \end{aligned}$$

d'où, en faisant dans cette identité $x = 1$, $y = 0$, $x' = 0$, $y' = 1$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, t, \tau, t', \tau') \\ &\quad = (t\tau' - t'\tau)^{-m}\mathrm{F}(u, \mathcal{C}', \ldots, \omega, \mathfrak{F}', \ldots, 1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

D'où les conclusions suivantes :

1° Un covariant double (et il en est de même évidemment d'un covariant simple et d'un invariant) est déterminé quand on connaît son terme principal, c'est-à-dire le terme auquel se réduit le covariant quand on y fait $t = 1$, $\tau = 0$, $t' = 0$, $\tau' = 1$.

On obtient, à une certaine puissance près de $(t\tau' - t'\tau)$.

la valeur du covariant en remplaçant respectivement dans le terme principal $a, b, c, \ldots$ par $u, \mathcal{E}', \mathcal{E}_0, \ldots$, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par $\omega, \mathfrak{J}', \mathfrak{J}_0, \ldots$.

2° Si l'on veut établir une relation entre des éléments géométriques dépendant de deux points de la sextique Z, on pourra toujours supposer que les paramètres de ces deux points sont o et ∞ ; de la relation qui a lieu dans ce cas particulier, on déduira la relation générale en remplaçant respectivement $a, b, c, \ldots$ et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par les émanants que j'ai mentionnés ci-dessus.

30. Pour faire une application simple des considérations qui précèdent, je remarquerai que l'on a

$$i = ae - 4bd + 3c^2 = (t\tau' - t'\tau)^{-4}[uu' - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' + 4\mathcal{E}_0^2].$$

L'équation de la quadrique S peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$uu' - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' + 4\mathcal{E}_0^2 = 0.$$

Les plans osculateurs de la sextique Z aux points (t) et (t'), dont les équations sont

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u' = 0,$$

coupent S suivant deux coniques situées sur le cône dont l'équation est

$$4\mathcal{E}_0^2 - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' = 0;$$

le sommet de ce cône est défini par les équations

$$\mathcal{E}_0 = 0, \quad \mathcal{E} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = 0.$$

Ce point est d'ailleurs le point (t, t') de la surface $\mathfrak{X}$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donnée une sextique Z, si l'on mène deux plans osculateurs quelconques de cette*

courbe, ils coupent la quadrique, qui contient Z, suivant deux coniques; le sommet d'un des cônes qui passe par ces deux coniques se trouve sur la surface $\mathfrak{X}$, dont Z est une asymptotique, et quand ces plans se déplacent de toutes les manières possibles, le sommet de ce cône décrit la surface $\mathfrak{X}$.

Remarque. — On peut par ces deux coniques mener un deuxième cône; le sommet de ce cône décrit une surface que j'étudierai dans la suite de ce Mémoire.

VI. — *Centre et plan central d'une sextique gauche.*

31. Outre l'invariant

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha,$$

qui est identiquement nul, les deux polynômes u et ω ont un autre invariant, du premier degré relativement aux coefficients de u,

$$\begin{aligned} h_0 = a(\gamma\varepsilon - \delta^2) + 2b(\gamma\delta - \beta\varepsilon) + c(\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2) \\ + 2d(\beta\gamma - \alpha\delta) + e(\alpha\gamma - \beta^2). \end{aligned}$$

L'équation $h_0 = 0$ représente un plan Π; pour trouver les points d'intersection de ce plan avec la sextique Z, il faut remplacer a, b, c,... par leurs valeurs tirées du tableau B; le résultat devant être un covariant de ω, il suffit de calculer son terme du degré le plus élevé et par conséquent de faire a, b, c égaux à zéro, et

$$d = \alpha t^6 \quad \text{et} \quad e = 4\beta t^6;$$

il vient ainsi, comme premier terme de ce covariant,

$$2[3\alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - 2\beta^3]t^6;$$

d'où l'on conclut que les paramètres des points où le plan Π rencontre la sextique Z sont les racines de l'équa-

tion que l'on obtient en égalant à zéro le covariant du sixième degré de ω (*).

Les paramètres des quatre points stationnaires de Z étant les racines de l'équation $\omega = 0$, on déduit de là et des propriétés bien connues du covariant du sixième degré d'une forme biquadratique la proposition suivante ;

Théorème VIII. — *Les quatre points stationnaires d'une sextique Z peuvent être partagés de trois façons différentes en deux groupes de deux points ; à chaque mode de groupement correspond sur la courbe une division en involution donnant lieu à deux points doubles. Les droites qui joignent les trois couples de points doubles sont situées dans un même plan* Π, *qui est le plan central de la sextique.*

Comme je le montrerai plus tard, ces trois droites sont situées sur la surface $\mathfrak{X}$, dont Z est une asymptotique.

32. Il est facile de conclure de ce qui précède qu'il ne peut y exister d'autres covariants de u et de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de u, que ceux que je viens d'examiner.

En égalant, en effet, à zéro un tel covariant, on a l'équation d'un plan qui rencontre Z en six points dont les paramètres sont les racines d'une équation que l'on obtient en égalant à zéro un covariant de ω du sixième degré. Or il n'existe qu'un seul covariant de ce degré; la

(*) Les points cuspidaux d'une sextique sont souvent désignés sous le nom de *points stationnaires*.

Par tout point (t) d'une sextique Z, on peut mener en effet un plan P osculateur de cette courbe et différent du plan (t); le paramètre t' de ce plan s'obtient en égalant à zéro l'émanant

$$\mathfrak{F}' = t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta) + (\beta t^3 + 3\gamma t^2 + 3\delta t + \varepsilon) = 0.$$

Si le paramètre (t) satisfait à la relation $\omega = 0$, on voit que l'on a $t' = t$ et le plan P se confond avec le plan (t).

proposition que je viens d'énoncer est donc démontrée.

De là diverses conséquences importantes.

En premier lieu, h_0 étant le seul invariant linéaire par rapport aux coefficients de u (sauf $a\varepsilon - 4b\delta + \ldots$, qui est identiquement nul), si l'on passe de la sextique Z à la sextique Z_ρ, en employant les substitutions dont j'ai parlé au § I, h_0 devra, à un facteur numérique près, conserver la même valeur; et, en effet, on vérifie facilement que l'on a, en conservant les notations de ce même paragraphe,

$$h'_0 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2 h_0.$$

D'où la proposition suivante :

Théorème IX. — *Toutes les sextiques qui sont les asymptotiques d'une surface* $\mathfrak{X}$ *ont même plan central.*

Je dirai que ce plan est aussi le *plan central* de $\mathfrak{X}$; comme je l'ai déjà fait observer, il coupe cette surface suivant trois droites.

33. *Équation de la surface du quatrième ordre qui contient les lignes nodales correspondant aux asymptotiques de la surface* $\mathfrak{X}$.

Pour tous les points de la courbe $\mathfrak{N}$, qui est la ligne nodale de la surface développable ayant Z pour arête de rebroussement, on a

$$\frac{ac-b^2}{a} = \frac{ad-bc}{2b} = \frac{ae+2bd-3c^2}{6c} = \frac{be-cd}{2d} = \frac{ce-d^2}{e} = \frac{3j}{2i}.$$

On déduit de là

$$\frac{-k}{4h_0} = \frac{3j}{2i},$$

d'où

$$6jh_0 + ik = 0,$$

et encore

$$(12) \qquad 6jh_0 + ik - h^2 = 0.$$

Cette équation représente une surface du quatrième ordre Ω qui contient la nodale $\mathcal{N}$; en se reportant aux formules (3) du tableau A, on voit que l'on a

$$i'k' - h'^2 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2(ik - h^2);$$

en vertu de la formule donnée dans le numéro précédent, on a donc identiquement

$$6jh'_0 + i'k' - h'^2 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2[6jh_0 + ik - h^2];$$

d'où l'on déduit facilement que la surface Ω contient les nodales $\mathcal{N}_\rho$, dont le lieu est ainsi donné par l'équation (12).

34. Il y existe un point O de l'espace dont les coordonnées s'expriment au moyen des coefficients de u et du hessien de u.

Les coordonnées de ce point sont déterminées par le système suivant d'équations

$$\frac{a}{3j_0\alpha - 2i_0(\alpha\gamma - \beta^2)} = \frac{b}{3j_0\beta - 2i_0\dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{2}} = \frac{c}{3j_0\gamma - 2i_0\dfrac{\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2}{6}},$$

....

On vérifie facilement que les quantités $a, b, c, \ldots$ sont les coordonnées d'un point, car elles satisfont identiquement à la relation

$$(1)\qquad a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0.$$

Cela posé, si l'on détermine le plan polaire du point O par rapport à une quadrique quelconque du réseau (i, h, k), c'est-à-dire à une quadrique dont l'équation soit de la forme

$$Ai + Bh + Ck = 0,$$

il est clair que l'équation de ce plan s'obtiendra en éga-

lant à zéro un invariant de u et de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de u.

D'après ce que j'ai dit plus haut, son équation est nécessairement

$$h_0 = 0.$$

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME X. — *Le plan central* Π *de la surface* $\mathfrak{X}$ *a même pôle relativement à toutes les quadriques du réseau* (i, h, k).

Je dirai que ce pôle est *le centre de la surface* $\mathfrak{X}$ *et des diverses sextiques qui sont les asymptotiques de cette surface.*

VII. — *Sur les droites qui sont situées sur la surface* $\mathfrak{X}$.

35. Si une droite peut être placée sur la surface $\mathfrak{X}$, elle rencontre S en deux points situés sur l'asymptotique Z. Cette droite est donc une corde de la sextique Z. Pour trouver la relation qui existe entre les paramètres des extrémités de cette corde, je supposerai qu'ils soient respectivement o et ∞, en faisant

$$t = 1, \quad \tau = 0, \quad t' = 0 \quad \text{et} \quad \tau' = 1.$$

D'après le tableau B, les coordonnées de ces points seront donc

$$a = b = c = 0, \quad d = \alpha, \quad e = 4\beta,$$

et

$$a = -4\delta, \quad b = -\varepsilon, \quad c = d = e = 0.$$

Désignons par x un paramètre variable; les coordonnées d'un point quelconque de la corde seront données par les équations

$$a = -4\delta, \quad b = -\varepsilon, \quad c = 0, \quad d = x\alpha, \quad e = 4x\beta.$$

On a

$$\begin{vmatrix} -4\delta & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & \varkappa\alpha \\ 0 & \varkappa\alpha & -4\varkappa\beta \end{vmatrix} = 4\varkappa(\varepsilon^2\beta - \varkappa\alpha^2\delta);$$

d'où l'on voit que la valeur du paramètre $\varkappa$ correspondant au troisième point de rencontre de la corde avec $\mathfrak{X}$ est donnée par l'équation

$$\varepsilon^2\beta - \varkappa\alpha^2\delta = 0;$$

si la corde est située tout entière sur la surface, cette équation doit être satisfaite pour une infinité de valeurs de $\varkappa$. On doit donc avoir

$$\varepsilon^2\beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha^2\delta = 0;$$

d'où l'on déduit, d'après les propositions données n° 29, les relations suivantes, qui existent entre les paramètres des extrémités d'une corde de Z située sur la surface,

$$\omega'^2\mathfrak{F}' = 0 \quad \text{et} \quad \omega^2\mathfrak{F} = 0,$$

ou bien

$$(\alpha t'^4 + 4\beta t'^3 + 6\gamma t'^2 + 4\delta t' + \varepsilon)^2$$
$$\times[t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta) + (\beta t^3 + 3\gamma t^2 + 3\delta t + \varepsilon)] = 0,$$

et

$$(\alpha t^4 + 4\beta t^3 + 6\gamma t^2 + 4\delta t + \varepsilon)^2$$
$$\times[t(\alpha t'^3 + 3\beta t'^2 + 3\gamma t' + \delta) + (\beta t'^3 + 3\gamma t'^2 + 3\delta t' + \varepsilon)] = 0.$$

36. On peut satisfaire à ces relations de deux façons distinctes :

1° En faisant

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega' = 0.$$

Les racines de ces équations sont les paramètres des

quatre points stationnaires de Z (qui sont les quatre points coniques de $\mathfrak{X}$) ; on en conclut que les six arêtes du tétraèdre dont ces points sont les sommets sont situées sur la surface.

2° En faisant

$$\mathfrak{F} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}' = 0.$$

Pour résoudre ce système d'équations, je remarque que, en éliminant t' entre ces deux équations, le résultat est un covariant dont le premier terme est

$$\alpha(\alpha^2\delta + 2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma)t'^3.$$

Ce covariant est donc $\omega\Gamma_0$, Γ_0 désignant le covariant du sixième degré de ω.

Laissant de côté le facteur étranger ω, on voit que les paramètres des extrémités des cordes cherchées seront les racines de l'équation

$$\Gamma_0 = 0.$$

Soient z_1, z_2 et z_3 les racines de l'équation (*)

$$z^3 - i_0 z + 2j_0 = 0;$$

on sait que Γ_0 est le produit des trois facteurs

$$\sqrt{z_1\omega - 2\eta}, \quad \sqrt{z_2\omega - 2\eta}, \quad \sqrt{z_3\omega - 2\eta},$$

où η représente le hessien de ω.

Les deux racines de l'équation

$$\sqrt{z_1\omega - 2\eta} = 0$$

sont les paramètres des extrémités d'une corde située sur la surface. Je désignerai cette corde par la lettre D_1. Aux deux autres facteurs correspondront deux autres cordes D_2 et D_3 ; il suit d'ailleurs de ce que j'ai dit au n° 31 que ces

(*) *Voir* SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 180 et suiv.

trois droites sont l'intersection de la surface $\mathfrak{K}$ par le plan central Π (*).

A cette occasion, je ferai remarquer que le théorème donné au n° 31 peut s'énoncer d'une façon un peu plus générale de la manière suivante :

Si l'on coupe une asymptotique quelconque de $\mathfrak{K}$ par une quadrique du réseau (i, h, k), cette quadrique rencontre la courbe en quatre points distincts des points coniques. Si l'on partage d'une façon quelconque ces points d'intersection en deux systèmes de deux points, la droite qui joint les deux points doubles de l'involution déterminée par ces deux systèmes est une des droites de la surface $\mathfrak{K}$ située dans le plan central.

VIII. — *Pôles et plans polaires relativement à la surface $\mathfrak{S}$. Applications diverses.*

37. Considérons un point dont les coordonnées soient a', b', c', d', e'.

L'équation du plan polaire de ce point, relativement à la quadrique $\mathfrak{S}$, est évidemment

$$a'\frac{di}{da} + b'\frac{di}{db} + c'\frac{di}{dc} + d'\frac{di}{dd} + e'\frac{di}{de} = 0,$$

ou bien

$$ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ca' = 0.$$

Si la quadrique $\mathfrak{S}$ est telle que l'on ait $i_0 = 0$, les coordonnées du centre de la surface $\mathfrak{K}$ (n° 34) sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

L'équation du plan polaire de ce point est donc

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

(*) Il est clair que tout ce qui précède suppose que la forme ω ne présente aucune particularité. J'examinerai plus tard les cas particuliers où ω aurait un facteur triple ou deux facteurs carrés.

et, cette relation étant identiquement satisfaite, on en conclut que le plan polaire est indéterminé; par suite:

Lorsque, pour une asymptotique Z, *on a* $i_0 = 0$, *cette asymptotique est située sur un cône du second degré dont le sommet est le centre de la courbe.*

38. Soit un plan

$$a\varepsilon_0 - 4b\delta_0 + 6c\gamma_0 - 4d\beta_0 + e\alpha_0 = 0;$$

on voit immédiatement que les coordonnées du pôle de ce plan sont données par le système d'équations

$$\frac{a}{2i_0\alpha_0 - \mathfrak{s}\alpha} = \frac{b}{2i_0\beta_0 - \mathfrak{s}\beta} = \frac{c}{2i_0\gamma_0 - \mathfrak{s}\gamma} = \frac{d}{2i_0\delta_0 - \mathfrak{s}\delta} = \frac{e}{2i_0\varepsilon_0 - \mathfrak{s}\varepsilon},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathfrak{s} = \alpha\varepsilon_0 - 4\beta\delta_0 - 6\gamma\gamma_0 - 4\delta\beta_0 + \varepsilon\alpha_0.$$

Il est facile, en effet, de vérifier :

1° Que les quantités déterminées par les équations précédentes sont effectivement les coordonnées d'un point, car elles satisfont à l'identité

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0;$$

2° Que le plan polaire de ce point, par rapport à $\mathfrak{S}$, est le plan donné.

39. Comme application des formules précédentes, considérons un plan tangent quelconque à la surface $\mathfrak{X}$. Comme nous l'avons vu (n° 18), son équation est

$$\mathcal{E}_0 = a t^2 t'^2 + 2b(tt'^2 + t^2 t') + c(t^2 + 4tt' + t'^2) + 2d(t + t') + e = 0;$$

on a, dans ce cas,

$$\mathfrak{s} = \mathcal{J}_0,$$

et les coordonnées du pôle de ce plan sont données par

le système d'équations

$$(13) \qquad \frac{a}{2i_0 - \mathfrak{J}_0\alpha} = \frac{b}{-i_0(t+t') - \mathfrak{J}_0\beta} = \ldots = \frac{e}{2i_0 t^2 t'^2 - \mathfrak{J}_0 \varepsilon}.$$

Supposons le point tellement choisi sur la surface $\mathfrak{X}$ que l'on ait

$$\mathfrak{J}_0 = 0,$$

les coordonnées du pôle seront données par les équations

$$\frac{a}{1} = \frac{2b}{-(t+t')} = \ldots = \frac{e}{t^2 t'^2};$$

en se reportant au n° 25, on voit que le point ainsi déterminé est le point de la nodale $\mathfrak{N}$, qui est l'intersection des tangentes (t) et (t'); le plan polaire de ce point touche par conséquent la surface $\mathfrak{X}$ au point (t, t').

D'où encore cette conséquence :

La surface développable, qui est la polaire réciproque de la nodale $\mathfrak{N}$ relativement à la quadrique $\mathfrak{s}$, est circonscrite à $\mathfrak{X}$.

40. D'après ce que je viens de dire, on voit que la surface de Steiner $\mathfrak{S}$, qui est la polaire réciproque de $\mathfrak{X}$ relativement à la quadrique $\mathfrak{s}$, contient la nodale $\mathfrak{N}$.

Cherchons l'équation de cette surface; il faut, pour l'obtenir, éliminer t et t' entre les équations (13). A cet effet, x désignant une quantité inconnue, je suppose que la valeur commune des rapports contenus dans ces équations soit égale à $\frac{x}{\mathfrak{J}_0}$. On mettra facilement ces équations sous la forme suivante :

$$\frac{2i_0 x}{\mathfrak{J}_0} = \frac{a + x\alpha}{1} = \frac{b + x\beta}{\frac{-(t+t')}{2}} = \frac{c + x\gamma}{\frac{t^2 + 4tt' + t'^2}{6}} = \ldots = \frac{e + x\varepsilon}{t^2 t'^2}.$$

Je remarque maintenant que ces équations expriment

que la forme $u + \varkappa\omega$ est un carré parfait; or, pour que cela soit possible, on doit avoir entre les invariants de u et de ω la relation suivante (*) :

$$(A - 48B)^2 - R = 0.$$

Dans cette formule, A et B représentent deux combinants qui, dans le cas actuel où

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

s'expriment, au moyen des invariants que nous avons introduits, par les formules suivantes :

$$A = 4i_0 i \quad \text{et} \quad B = -\frac{k}{4} - \frac{1}{6}i_0 i;$$

R représente le résultant des équations u et ω. Par suite, la relation précédente (qui est évidemment l'équation de la surface $\mathfrak{S}$) devient

$$144(k + i_0 i)^2 - R = 0.$$

Il est clair que l'équation $R = 0$ représente les plans osculateurs de la sextique Z en ses quatre points stationnaires; ces plans touchent la surface $\mathfrak{S}$ le long de quatre coniques situées sur la quadrique

$$k + i_0 i = 0.$$

Cette quadrique est la polaire réciproque relativement à $\mathfrak{s}$ d'une quadrique T à laquelle sont circonscrits les quatre cônes nodaux de la surface (**).

(*) SALMON, *Higher Algebra*, §§ 213 et 214.

(**) Pour un point conique de la surface $\mathfrak{K}$, l'équation $\omega = 0$ étant satisfaite, de la formule donnée (n° 10), il résulte que l'équation du cône, circonscrit à $\mathfrak{K}$ et ayant ce point pour sommet, est

$$J_0^2 = 0.$$

Le cône circonscrit est donc un cône du second degré double; c'est un des cônes nodaux de la surface.

La forme de l'équation précédente montre qu'elle représente une quadrique passant par l'intersection des deux quadriques $i = 0$ et $k = 0$.

Je dirai, pour abréger, que la quadrique $k = 0$ est adjointe à la quadrique S ($i = 0$), et je la désignerai par la notation S'. Cela posé, la remarque précédente donne lieu, relativement à la surface T, à la proposition suivante :

Théorème XI. — *Si l'on considère une quadrique quelconque S_ρ, passant par une asymptotique de $\mathfrak{X}$, et la quadrique adjointe S'_ρ, la développable, circonscrite à S_ρ le long de leur intersection, est circonscrite à la quadrique T.*

Réciproquement, si l'on circonscrit à T et à S_ρ une surface développable, la courbe suivant laquelle cette développable touche S_ρ est située sur S'_ρ.

IX. — *Sur les fonctions qui jouent le rôle d'invariants relativement aux substitutions qui permettent de passer d'une asymptotique de $\mathfrak{X}$ aux autres asymptotiques de la surface.*

41. Étant donnée une asymptotique quelconque Z de la surface $\mathfrak{X}$, on peut, en général (sauf un cas particulier que j'examinerai tout à l'heure), en déduire toutes les autres asymptotiques au moyen des substitutions dont j'ai parlé au § I.

Il est important de remarquer que les *quatre cônes nodaux appartiennent à toutes les asymptotiques.*

Sur ces cônes, et en général sur la théorie de la surface qui fait l'objet de ce Mémoire, *voir :*

Sturm : *Über die Römische Fläche von Steiner* (*Math. Ann.*, III);

Eckardt : *Beiträge zur analytischen Geometrie* (*Math. Ann.*, V);

Townsend : *On the Nodal Cones of Quadrinodal Cubics* (*Quarterly Journal*, X).

Ces substitutions peuvent être définies par le système linéaire

$$\begin{matrix} \rho & \theta \\ \lambda & \mu, \end{matrix}$$

et il y existe un certain nombre de fonctions des coefficients a, b, c,... qui, quand on y effectue ces substitutions, ne changent pas de valeur, ou, pour parler plus exactement, sont simplement multipliées par une puissance de $(\rho\mu - \lambda\theta)$.

Ces fonctions, lorsqu'on les égale à zéro, représentent des surfaces indépendantes de l'asymptotique particulière qui sert de base au système de coordonnées et ne dépendant que de la surface $\mathcal{H}$ elle-même.

Telles sont, par exemple, les fonctions $ik - h^2$ et h_0, qui donnent lieu aux relations

$$i'k' - h'^2 = (\rho\mu - \lambda\theta)^2 (ik - k^2)$$

et

$$h_0 = (\rho\mu - \lambda\theta)^{2} (ik - h^2).$$

L'équation $ik - h^2 = 0$ représente, comme nous l'avons vu, l'enveloppe des quadriques S_ρ, et l'équation $h_0 = 0$ est celle du plan central.

Les fonctions qui jouissent de cette propriété jouent évidemment un rôle important dans la théorie de la surface $\mathcal{H}$; outre celles dont je viens de parler, il est facile d'en trouver plusieurs autres.

Il résulte, en effet, des formules données au n° 7 du § I, que, par la substitution

$$\begin{matrix} \rho & \theta \\ \lambda & \mu, \end{matrix}$$

les formes

$$ix^2 + 2hxy + ky^2 \quad \text{et} \quad x^3 - i_0 xy^2 + 2j_0 y^3$$

se changent respectivement en

$$i'x^2 + 2h'xy + k'y^2 \quad \text{et} \quad x^3 - i'_0 xy^2 + 2j'_0 y^3.$$

De là résulte que les invariants de ce système de formes sont des fonctions jouissant de la propriété dont je viens de parler.

Nous aurons à considérer (*) :

1° L'invariant quadratique

$$i_0^2 i + 18 j_0 h + 3 i_0 k;$$

je désignerai par Θ la quadrique dont l'équation s'obtient en égalant à zéro cet invariant;

2° Le résultant de ces formes; j'étudierai de préférence les facteurs de ce résultant.

En désignant, comme au n° 36, par z_1, z_2 et z_3 les trois racines de l'équation

$$z^3 - i_0 z + 2 j_0 = 0,$$

je m'occuperai des surfaces représentées par les équations

$$z_1^2 i + 2 z_1 h + k = 0,$$
$$z_2^2 i + 2 z_2 h + k = 0,$$
$$z_3^2 i + 2 z_3 h + k = 0.$$

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DE COMPAS (**);

PAR M. PEAUCELLIER.

Nous donnerons le nom de *compas composé* à un système quelconque de pièces rigides articulées *à liaison complète*. On sait que cette dénomination s'applique généralement à tout assemblage de corps unis entre eux de telle sorte, que le mouvement d'un point quelconque

---

(*) SALMON, *Algèbre supérieure*, § 157.

(**) Cette question date de 1864, et a été résolue à cette époque, comme l'indique la lettre insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 414.

commande celui de tous les autres. Le pantographe, le parallélogramme de Watt, etc., constituent de pareils assemblages et peuvent être considérés comme des compas composés.

Les appareils de ce genre jouissent du précieux avantage d'exiger de très-faibles efforts pour être mis en mouvement; ils donnent lieu à des déplacements continus et parfaitement définis, grâce à la possibilité de supprimer pour ainsi dire complétement tout jeu dans les articulations. Ils n'ont point d'irrégularités ni de « temps perdu », pour parler le langage technique. Ces diverses propriétés les recommandent d'une manière toute spéciale au constructeur d'instruments de précision, et nous les adopterons exclusivement pour l'objet que nous avons en vue : c'est-à-dire le tracé mécanique des courbes planes.

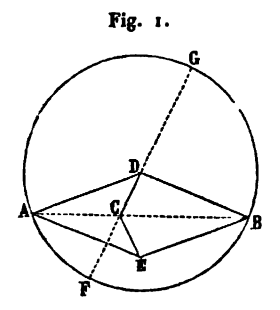
La ligne que parcourt un point quelconque guidé par une combinaison de pièces articulées est nécessairement algébrique. On conçoit que, réciproquement, toute courbe algébrique puisse être engendrée à l'aide d'un système articulé convenablement choisi : car on disposera toujours d'un nombre suffisant d'éléments variables, rayons et centres de rotation, pour satisfaire aux équations exprimant l'identité entre la courbe décrite et une courbe donnée.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons à faire connaître les compas composés traçant les lignes les plus connues : la droite, le cercle de tout rayon, les sections coniques, enfin les conchoïdes, la cissoïde. Nous présenterons les résultats de nos recherches sous la forme synthétique, les procédés analytiques qui nous ont guidé dans la partie la plus intéressante de ce travail, celle relative à la ligne droite, étant beaucoup plus compliqués et ne constituant pas, dans l'espèce, un procédé d'investigation suffisamment méthodique.

Lemme. — Un point quelconque C (*fig.* 1), pris sur la diagonale d'un losange, la divise en deux segments dont le produit $AC \times CB$ est égal à la différence $\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2$, entre les carrés construits sur le côté du losange et sur la distance CD du point considéré aux sommets de l'autre diagonale.

En effet, prolongeons CD jusqu'à sa rencontre en F

Fig. 1.



et G avec le cercle décrit du point D comme centre avec DA pour rayon ; on aura

$$AC \times BC = CF \times CG = (AD - CD)(AD + CD)$$
$$= \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 \ (*).$$

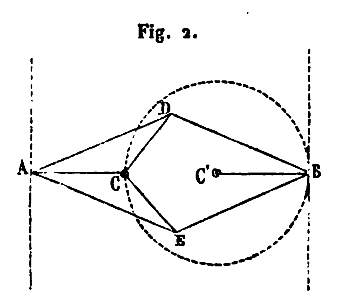
Il suit de là que si l'on suppose que la figure EADBECD représente un assemblage de tiges rigides articulées à leurs extrémités, et que le point C demeure fixe, les sommets opposés A et B décriront des courbes réciproques l'une de l'autre. Cette combinaison formera l'organe essentiel des divers compas composés que nous aurons à examiner.

(*) Cette démonstration, d'une remarquable simplicité, nous a été donnée par M. Mannheim.

En effet :

1° La réciproque d'une droite étant un cercle passant par le pôle, si le point B (*fig.* 2 et 3) est assujetti à se

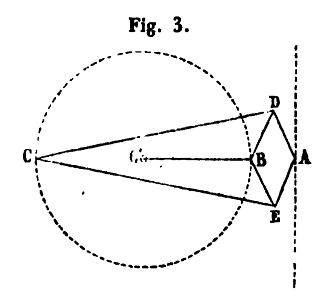
Fig. 2.



mouvoir circulairement, en passant par le centre d'articulation C, le mouvement du point A sera rectiligne. Il suffira donc, pour engendrer la droite, d'introduire dans le mécanisme précité EADBECD un nouveau centre fixe C', auquel on reliera le point B, le lien C'B étant d'une longueur égale à la distance CC' des centres fixes.

Ce qui précède constitue une solution rigoureuse du problème posé par Watt; elle est assez simple pour pouvoir être employée avec avantage dans certaines machines à longue course. M. Mannheim, en 1867, en a fait

Fig. 3.



l'objet d'une communication à la Société Philomathique de Paris.

2° Lorsque le cercle décrit par le sommet B ne passe point par le centre fixe C, le sommet opposé A se meut sur un cercle dont le rayon est représenté par l'expression

$$R = \frac{(a^2 - b^2)r}{r^2 - d^2},$$

dans laquelle on désigne par a le côté du losange AD, b la bride CD, r le rayon C'B, d la distance des centres C, C'.

Si $r = d$, on a $R = \infty$, ce qui répond, en effet, au cas de la ligne droite.

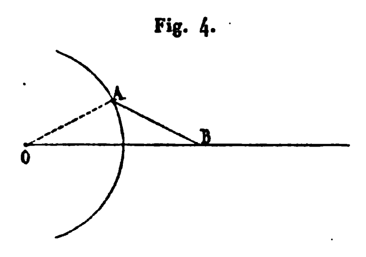
Cette combinaison de pièces articulées permettra donc, en faisant varier l'un des éléments, la distance CC' par exemple, de tracer d'une manière continue des arcs de cercle de toute courbure. Les dessinateurs savent que cette opération, en apparence si élémentaire, n'est pas moins compliquée que le tracé d'une courbe géométrique quelconque, dès qu'il s'agit d'une courbure dépassant les limites extrêmes du compas à verge.

3° Considérons maintenant les sections coniques. On sait qu'il existe, pour la construction de ces courbes, une infinité de théorèmes conduisant à déterminer, au moyen de la ligne droite et du cercle, des points successifs de ces lignes. Les systèmes articulés dont il vient d'être question permettant, pour ainsi dire, de matérialiser toute combinaison de lignes droites et de cercles, sans recourir à d'autres organes de transmission que des tiges articulées, on pressent qu'il doit exister une infinité de compas composés, propres au tracé des lignes du second ordre.

Ainsi, une droite finie AB (*fig.* 4) se mouvant, par exemple, en s'appuyant sur une circonférence de même rayon et sur un de ses diamètres OB, chaque point de la ligne mobile décrit une ellipse. Ce théorème fournit un

moyen très-simple de constituer le compas elliptique, puisque nous savons guider la droite AB par ses extrémités, comme l'exigent les données de la question.

Fig. 4.



Mais il est une solution plus générale, susceptible, par une même combinaison de lignes, d'engendrer toutes les coniques indistinctement.

L'équation en coordonnées polaires de ces courbes est

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega},$$

et représente des ellipses, des paraboles ou des hyperboles, selon que e est < 1, égal à 1 ou > 1.

Si l'on considère la courbe réciproque de la précédente, elle aura pour équation

$$\rho' = \frac{k^2(1 + e\cos\omega)}{p},$$

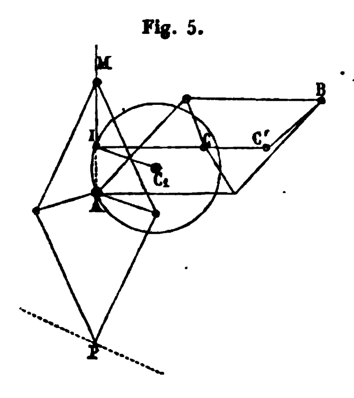
k étant une constante. C'est un limaçon de Pascal, dont nous allons indiquer la génération mécanique.

Pour cela, revenons au compas relatif à la ligne droite, auquel nous ajouterons la bride C_1I (*fig.* 5), articulée au point I de la pièce CC', où la droite décrite par A coupe la ligne des centres CC'. Si l'on fixe le point C_1 ainsi que le sommet A, que l'on fasse $C_1I = C_1A$, et que toutes les autres parties de la figure soient libres, il est visible que

tout point M de la perpendiculaire IM à CC′ parcourra un limaçon de Pascal. L'équation en sera

$$\rho' = 2C_1I\cos\omega + IM.$$

Fig. 5.



Sa réciproque par rapport à A est une conique. On obtiendra cette dernière en liant le point M au sommet libre d'un losange articulé, dont on fixera le centre d'assemblage des brides en A. Ce point deviendra le foyer de la conique, dont AC sera la direction de l'axe principal, et qui sera :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Une ellipse}\\ \text{Une parabole}\\ \text{Une hyperbole}\end{array}\right\}\ \text{si}\ \frac{IM}{2C_1I}\left\{\begin{array}{l}<1,\\ =1,\\ >1.\end{array}\right.$$

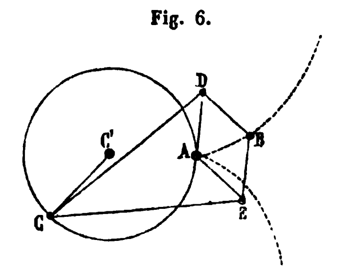
Il est d'ailleurs évident que, en attribuant à IM et à C_1I des valeurs convenables, il sera possible de tracer avec le même compas composé toutes les courbes du second degré.

Conchoïdes du cercle et de la droite, cissoïde, etc. — On vient de voir comment on peut opérer pour le tracé de la conchoïde du cercle ou limaçon de Pascal; en modifiant la combinaison relative à cette courbe, d'une

manière analogue à ce que l'on a fait pour les coniques, on engendrera la conchoïde de la droite. On trouve de même des combinaisons propres à la lemniscate; mais la plupart d'entre elles sont assez compliquées. Nous nous contenterons d'indiquer, pour terminer cette étude sommaire, le compas et le cissoïde, qui est d'une extrême simplicité.

Le centre d'articulation des brides CD, CE (*fig.* 6) est assujetti à parcourir un cercle passant par le sommet fixe A du losange, et dont le diamètre égale $\sqrt{b^2 - a^2}$;

Fig. 6.



b et a désignant, comme précédemment, les longueurs CD et AD. Le sommet opposé B tracera, dans ces conditions, la cissoïde, comme il est aisé de s'en assurer en formant l'équation de la courbe décrite.

SUR LA CAPILLARITÉ (*).

Influence de la courbure.

Soient AmB (*fig.* 1) une section normale faite en un point m de la ligne de séparation de deux liquides (L_1),

(*) Extrait du *Traité de Mécanique générale* de M. Resal, en cours de publication chez M. Gauthier-Villars, avec l'autorisation de l'auteur et de l'éditeur.

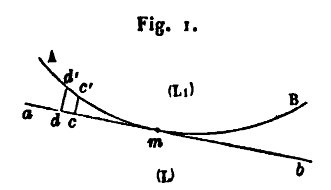
(L), superposés dans un tube capillaire, la concavité étant tournée vers (L_1);

ab la trace du plan tangent en *m*;

δ_1, δ les densités des deux liquides;

z la hauteur du point *m* au-dessus du niveau de la portion de (L) extérieure au tube.

Fig. 1.



Le point matériel *m* est en équilibre sous l'action de son poids *mg* et des actions qu'il reçoit des molécules (L) et (L_1).

On peut considérer la résultante des actions moléculaires de (L_1) sur *m*, comme étant due à celle Q_1 du même liquide dans l'hypothèse où *ab* serait la surface de séparation, et à la résultante Q'_1, prise en sens contraire, des actions provenant des molécules du ménisque.

Si nous désignons, pour (L), par Q et Q' les équivalents de Q_1 et Q'_1, l'action exercée par ce liquide sur *m* sera de même la résultante de Q et Q'; de sorte que les forces Q, Q', $-Q_1$, Q'_1, *mg* doivent se faire équilibre sur le point *m*.

D'après cet exposé, pour simplifier le langage, nous pourrons considérer le ménisque comme existant pour les deux fluides, en le considérant comme positif pour (L) et négatif pour (L_1). Laplace et Gauss ont supposé que les liquides dans les tubes capillaires n'éprouvent aucune variation dans leur densité. Poisson au contraire, par des considérations particulières, admet que la densité a subi une altération dont il croit devoir tenir compte dans le

voisinage de la surface AmB. Lamé, dans ses leçons de Physique, en se basant sur la faible compressibilité des liquides, considère cette variation comme nulle ou négligeable.

Nous nous rangerons à cette dernière manière de voir, qui nous conduit à regarder (L) et (L_1) comme homogènes dans toute leur masse, et par suite les actions Q et Q_1 comme normales à AmB.

Il faut donc, pour l'équilibre, que la résultante de mg, $-Q'$, $-Q'_1$ soit aussi normale à la surface, ou que le travail élémentaire de ces trois forces pour un déplacement de m sur cette surface soit nul, ou encore que le potentiel de mg, des actions du ménisque de (L) sur m, et de celles du ménisque de (L_1) prises en sens contraire, soit constant pour tout point de la surface.

Le potentiel de l'action de la molécule m' du ménisque de (L) sur m est de la forme $mm'f(r)$, $f(r)$ étant une certaine fonction de la distance r de ces deux molécules.

Considérons un élément de volume de ce ménisque, limité par deux plans normaux en m faisant entre eux un angle $d\theta$, et par deux cylindres concentriques. Si l'on remarque que le rayon ι de la sphère d'activité est très-petit, on peut supposer, pour toute molécule de l'élément de volume considéré, $r = mc$, et par suite $cd = dr$; le potentiel dû à l'action de la masse déterminée par l'élément de volume est par suite

$$m\delta r d\theta f(r) cc' . dr,$$

et, pour toute la portion du ménisque limitée par les deux plans normaux,

$$m\delta\, d\theta \int_0^{\iota} rf(r) cc' . dr.$$

Mais, en appelant ρ le rayon de courbure de l'une des sec-

tions normales, on a $cc' = \frac{r^2}{2\rho}$, et l'expression ci-dessus devient

$$\delta \frac{d\theta}{2\rho} m \int_0^{\varepsilon} f(r) r^3 dr = \frac{m\, d\theta}{2\rho} \frac{k}{\pi},$$

en posant $\pi\delta \int_0^{\varepsilon} f(r) r^3 dr = k$, qui est une constante.

Soient maintenant R, R' les rayons de courbure principaux de la surface en m, l'angle θ étant censé mesuré à partir de la trace sur le plan tangent du plan normal correspondant au premier de ces rayons, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos^2\theta + \frac{1}{R'} \sin^2\theta,$$

et le potentiel, pour tout le ménisque, est

$$\frac{mk}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{R} \cos^2\theta + \frac{1}{R'} \sin^2\theta \right) d\theta = \frac{mk}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

Le potentiel du ménisque de (L) sera représenté de la même manière par

$$\frac{mk_1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

Si donc on appelle C une constante, nous aurons

$$mgz + \frac{mk}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) - \frac{mk_1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = mC,$$

ou, en posant $k_1 - k = H$,

$$gz = \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + C.$$

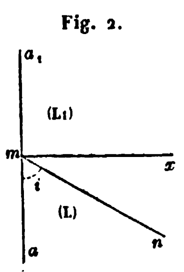
Dans le cas d'un seul liquide, (L_1) représentera l'atmosphère, et l'on devra avoir $C = 0$, puisque, pour un diamètre suffisamment grand du tube, on doit avoir $R = \infty$, $R' = \infty$ et $z = 0$, et l'on a la formule connue

$$gz = \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

Influence de la paroi du tube.

La *fig.* 2 représente la section normale en un point m

Fig. 2.



de l'intersection de la surface de contact de (L) et (L_1) avec celle de la paroi.

Soient mn, aa_1 les tangentes en m aux deux sections faites respectivement dans ces deux surfaces par le plan de la figure; i l'inclinaison de mn sur ma dans (L), mx la normale à la paroi, que nous supposerons formée d'une matière homogène. Si la paroi était un plan indéfini, son action mN sur la masse m serait dirigée suivant mx, et N serait une constante.

Quelle que soit la forme de la paroi, on peut également considérer N comme constante; car il est clair que les actions sur m exercées par les molécules du ménisque de la paroi ne peuvent donner, suivant mx, que des composantes de l'ordre de quantités que l'on peut négliger.

Nous ferons également abstraction, mais avec moins d'autorité, de l'influence du ménisque de (L) et (L_1), qui d'ailleurs est relativement faible dans la détermination de la composante suivant mx des actions qu'exercent les deux fluides sur m. Cette hypothèse doit être implicitement faite dans ses calculs par Poisson, lorsqu'il arrive

à conclure que i est constant, ce qui est évident d'après les considérations qui précèdent.

Soit $mm'\varphi(r)$ l'action exercée par une molécule m' de (L) sur m, r étant la distance des deux molécules. Concevons dans ce liquide un cône ayant m pour sommet et d'une ouverture infiniment petite $d\omega$, et dont les génératrices fassent, aux infiniment petits près, l'angle α avec mn. La masse élémentaire $\delta r^2 d\omega\, dr$ de ce cône donnera, suivant mx, la composante

$$m\delta r^2 d\omega\, dr\, \varphi(r) \cos\alpha,$$

et l'on a pour tout le cône, en continuant à appeler ι le rayon de la sphère d'activité,

$$m\delta\, d\omega \cos\alpha \int_0^\iota \varphi(r) r^2 dr = mq\, d\omega \cos\alpha,$$

q étant une constante dépendant de la nature de (L). Il vient, par suite, pour la composante normale totale due à l'action de ce liquide

$$mq \int \cos\alpha\, d\omega,$$

l'intégrale se rapportant au fuseau sphérique de centre m, d'un rayon égal à l'unité, limité par les plans mn et ma. Mais il est clair que cette intégrale représente la projection du fuseau sur un plan perpendiculaire à mx, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos i$. L'expression ci-dessus devient donc

$$mq \frac{\pi}{2} (1 - \cos i).$$

En appelant q_1 l'équivalent de q pour (L_1), ce liquide donne de même la composante normale

$$mq_1 \frac{\pi}{2} (1 + \cos i).$$

Si l'on néglige l'action de la pesanteur, ou si l'on suppose *ma* vertical, on a donc

$$m\mathrm{N} + mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i) + mq_1\frac{\pi}{2}(1 + \cos i) = 0,$$

d'où

$$\cos i = \frac{2\mathrm{N} + \pi(q + q_1)}{\pi(q - q_1)}.$$

THÉORÈMES SUR LES COMBINAISONS;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

1. Nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, par K_m^n le nombre des combinaisons complètes, et par C_m^n le nombre des combinaisons simples de m objets n à n.

Nous représenterons par $\left(\frac{p}{q}\right)$ la partie entière du quotient de p par q.

Enfin nous nous appuierons sur ce fait bien connu, que le nombre x, qui exprime combien de fois le nombre premier p entre comme facteur dans le produit $1.2.3\ldots n$, est donné par la formule

$$x = \left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n}{p^2}\right) + \left(\frac{n}{p^3}\right) + \cdots.$$

II.

2. THÉORÈME. — *Si* $m - 1$ *et* $n + 1$ *sont premiers entre eux,* K_m^n *est divisible par* $n + 1$.

Ceci revient à démontrer que, dans le cas où $m - 1$ et

$n+1$ sont premiers entre eux, le quotient

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n(n+1)}$$

est un nombre entier.

Il suffit pour cela d'établir que, dans ce cas, tout nombre premier p, qui entre au dénominateur, entre au numérateur au moins le même nombre de fois.

Le nombre premier p entre au numérateur un nombre x de fois donné par la formule

$$x=\left(\frac{m+n-1}{p}\right)+\left(\frac{m+n-1}{p^2}\right)+\left(\frac{m+n-1}{p^3}\right)+\ldots$$
$$-\left(\frac{m-1}{p}\right)-\left(\frac{m-1}{p^2}\right)-\left(\frac{m-1}{p^3}\right)-\ldots.$$

Le même nombre premier p entre au dénominateur un nombre y de fois donné par la formule

$$y=\left(\frac{n+1}{p}\right)+\left(\frac{n+1}{p^2}\right)+\left(\frac{n+1}{p^3}\right)+\ldots.$$

Donc il suffit de prouver que, quand $m-1$ et $n+1$ sont premiers entre eux, on a, pour toute valeur de ∂ entière et supérieure à l'unité,

$$\left(\frac{m+n-1}{\partial}\right)-\left(\frac{m-1}{\partial}\right)\geq\left(\frac{n+1}{\partial}\right),$$

ou bien

$$\left(\frac{m+n-1}{\partial}\right)\geq\left(\frac{m-1}{\partial}\right)+\left(\frac{n+1}{\partial}\right).$$

Divisons $m-1$ et $n+1$ par ∂. Soient M, N les quotients; μ et ν les restes. Nous aurons

$$m-1=\mathrm{M}\partial+\mu,$$
$$n+1=\mathrm{N}\partial+\nu.$$

L'inégalité précédente revient alors à celle-ci :

$$\left(\frac{M\partial + N\partial + \mu + \nu - 1}{\partial}\right) \geq \left(\frac{M\partial + \mu}{\partial}\right) + \left(\frac{N\partial + \nu}{\partial}\right).$$

Or, si $m - 1$ et $n + 1$ sont premiers entre eux, μ et ν ne sont pas nuls en même temps; donc $\mu + \nu - 1$ est supérieur ou égal à zéro; donc la partie entière du premier quotient est, au moins, $M + N$, c'est-à-dire au moins égale à la somme des parties entières des deux derniers quotients. L'inégalité est donc satisfaite, et le théorème démontré.

3. Théorème. — *Si m et n sont premiers entre eux, K_m^n est divisible par m.*

En effet on a, identiquement,

$$\frac{K_m^n}{m} = \frac{K_{m+1}^{n-1}}{n}.$$

Or, puisque m et n sont premiers entre eux, K_{m+1}^{n-1}, d'après le théorème précédent, est divisible par n. Donc le second membre de l'identité précédente est entier. Donc le premier l'est aussi. Donc K_m^n est divisible par m.

4. Théorème. — *Si $m - 1$ et n sont premiers entre eux, K_m^n est divisible par $m + n - 1$.*

En effet on a, identiquement,

$$\frac{K_m^n}{m + n - 1} = \frac{K_m^{n-1}}{n}.$$

Or, puisque $m - 1$ et n sont premiers entre eux, d'après le premier théorème, K_m^{n-1} est divisible par n. Donc le second membre de l'égalité précédente est entier. Donc le premier l'est aussi. Donc K_m^n est divisible par $m + n - 1$.

III.

5. Théorème. — *Si $m+1$ et $n+1$ sont premiers entre eux, C_m^n est divisible par $n+1$.*

Pour le démontrer, nous partirons de l'identité

$$C_m^n = K_{m-n+1}^n.$$

Or, si $m+1$ et $n+1$ sont premiers entre eux, $m-n$ et $n+1$ le sont aussi. Donc, d'après le premier théorème, K_{m-n+1}^n est divisible par $n+1$. Il en est donc de même de C_m^n, ce qui démontre le théorème.

6. Théorème. — *Si m et n sont premiers entre eux, C_m^n est divisible par m.*

En effet on a, identiquement,

$$\frac{C_m^n}{m} = \frac{C_{m-1}^{n-1}}{n}.$$

Or, si m et n sont premiers entre eux, d'après le théorème qui précède immédiatement, C_{m-1}^{n-1} est divisible par n. Le second membre est entier. Le premier l'est donc aussi, et C_m^n est divisible par m.

7. Théorème. — *Si $m+1$ et n sont premiers entre eux, C_m^n est divisible par $m-n+1$.*

En effet on a, identiquement,

$$\frac{C_m^n}{m-n+1} = \frac{C_m^{n-1}}{n}.$$

Or, si $m+1$ et n sont premiers entre eux, C_m^{n-1}, d'après le premier théorème relatif aux combinaisons simples, est divisible par n. Le second membre de l'identité est entier. Le premier l'est aussi. Donc C_m^n est divisible par $m-n+1$.

IV.

8. Le premier des six théorèmes qui précèdent a été démontré directement; les cinq autres en ont été déduits par la considération de certaines identités.

Ces mêmes identités peuvent servir à démontrer séparément chacun de ces six théorèmes, d'une façon fort indirecte, il est vrai, mais très-facile et surtout très-rapide. Nous nous contenterons de donner, comme exemple, la démonstration du premier théorème.

Reprenons, pour cela, l'identité employée au n° 3. Elle peut s'écrire

$$\frac{K_{m-1}^{n+1}}{m-1} = \frac{K_m^n}{n+1},$$

ou bien

$$(n+1)K_{m-1}^{n+1} = (m-1)K_m^n.$$

Or $n+1$ divise le premier membre; donc il divise le second; par suite, s'il est premier avec $m-1$, il divise K_m^n. Donc :

Si $m-1$ et $n+1$ sont premiers entre eux, K_m^n *est divisible par $n+1$.*

Les cinq autres théorèmes se démontreraient d'une façon analogue.

V.

9. Comme conséquence des propositions précédentes, on peut citer le théorème suivant :

Théorème. — *Si $m+1$ est un nombre premier, chaque coefficient du développement de $(a+b)^m$, excepté le dernier, est divisible par son rang.*

En effet, le terme de rang $n+1$ a pour coefficient C_m^n. Or $m+1$, étant premier, est premier avec toutes les va-

leurs de $n+1$ inférieures à $m+1$. Donc, d'après le premier théorème sur les combinaisons simples, C_m^n est toujours divisible par $n+1$, excepté dans le cas où $n=m$.

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES ET SUR LES SURFACES DE SECOND ORDRE;

Par M. Louis SALTEL.

I.

Prenons à volonté une conique S définie par cinq points P, A, B, 1, 2; menons les rayons (P1), (P2), et imaginons les cercles (AB1), (AB2); soient 1′ et 2 leurs seconds points d'intersection avec ces rayons; si l'on considère le cercle Σ défini par les trois points P, 1′, 2′, on peut énoncer les divers théorèmes suivants :

Théorème I. — *Par les points* A, B, *faites passer un cercle arbitraire* λ, *qui coupe le cercle* Σ *en* a, b; *menez les rayons* PA, PB, *et soient* A′, B′ *les seconds points d'intersection de ces rayons avec le cercle* λ : *les points* A′, B′ *sont deux points de la conique* S.

Remarque. — Ce théorème donne une solution de ce problème :

Construire la conique S *définie par cinq points.*

Théorème II. — *Si l'on joint les points de rencontre de la droite* AB *avec le cercle* Σ *au point* P, *les deux droites ainsi obtenues sont les directions asymptotiques de la conique* S. *Conséquemment, la conique* S *sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la droite* AB *rencontrera, touchera ou ne rencontrera pas le cercle* Σ.

Remarque. — Ce théorème donne une solution immédiate de ces trois problèmes :

1° *Étant donnés cinq points d'une conique, déterminer la forme de la courbe sans la construire.*

2° *Construire une parabole, connaissant quatre points.*

3° *Construire une hyperbole équilatère, connaissant quatre points.*

Théorème III. — 1° *La tangente à la conique* S *en l'un des points* A, B, *au point* A, *par exemple, est la tangente en ce point au cercle passant par les points* A, B *et par le second point de rencontre du cercle* Σ *avec* PA. 2° *La tangente en* P *est la droite qui passe par le second point de rencontre des deux cercles* Σ *et* (PAB).

Nota. — Si l'on joint deux à deux les points de rencontre des tangentes en A, B, P au milieu des cordes déterminées par les mêmes points, les droites obtenues passeront par le centre; de là la détermination de ce point.

Remarque. — Les trois points P, A, B étant quelconques, il résulte du théorème précédent la construction de la tangente en un point quelconque de S.

Théorème IV. — *Les bissectrices des angles des deux droites* AB, A'B' *sont les directions des axes de la courbe.*

Remarque. — Pour obtenir la grandeur des axes, on n'aura, d'après ce théorème, qu'à recourir à la solution de ce problème :

Une conique étant définie par cinq points, trouver son intersection avec une droite.

Théorème V. — *Si l'on suppose les deux points* A, B *confondus en* A *suivant la direction* AB, *le cercle tangent en* A *à cette droite et passant par le second point*

de rencontre de PA *avec* Σ *est le cercle osculateur en ce point de la courbe.*

Remarque. — L'hypothèse que l'on vient de faire étant toujours possible, d'après le théorème III, il en résulte la construction suivante du cercle osculateur en un point A d'une conique définie par ce point, sa tangente AT et trois points P, 1, 2 :

Règle. — *Par chacun des points* 1, 2, *menez le cercle tangent en* A *à la droite* AT; *soient* 1′, 2′ *les seconds points d'intersection de ces cercles avec* (P 1), (P 2); *le cercle osculateur en* A *est le cercle tangent en ce point à* AB, *et passant par le second point de rencontre du cercle* (P 1′ 2′) *avec la droite* PA.

II.

Prenons à volonté dans l'espace une surface du second ordre V, définie par une section circulaire C et quatre points P, 1, 2, 3; menons les rayons (P 1), (P 2), (P 3), et imaginons les sphères déterminées par le cercle C et par les points 1, 2, 3; soient 1′, 2′, 3′ leurs seconds points d'intersection avec ces sphères; si l'on considère la sphère Σ déterminée par les quatre points P, 1′, 2′, 3′, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Par le cercle* C, *faites passer une sphère quelconque* A, *coupant la sphère* Σ *suivant un cercle* C_1; *menez le cône qui a pour sommet le point* P *et pour base le cercle* C_1, *et soit* C′ *le second cercle d'intersection de ce cône avec la sphère* λ : *le cercle* C′ *est une nouvelle section circulaire de la surface* V.

Théorème II. — *Le cône qui a pour sommet le point* P *et pour base le cercle d'intersection du plan* C *avec la sphère* Σ *est le cône asymptotique de la surface; conséquemment, la surface* V *est un hyperboloïde, un parabo-*

loïde elliptique ou un ellipsoïde, suivant que le plan du cercle C *rencontre, touche ou ne rencontre pas la sphère* Σ.

Remarque. — Ce théorème donne une solution de ce problème :

Construire un paraboloïde elliptique défini par une section circulaire et trois points.

La solution de ce problème revient à construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan donné.

Théorème III. — *Le plan tangent en* P *à la surface* V *est le plan d'intersection de la sphère* Σ *et de la sphère* (CP).

Remarque. — Ce théorème enseigne à construire le plan tangent en un point quelconque de la surface.

Théorème IV. — *Les plans bissecteurs des plans des deux cercles* C, C' *sont deux plans parallèles à deux plans principaux de la surface.*

SOLUTION ANALYTIQUE

de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'Agrégation de 1872

(voir 2e série, t. XI, p. 450);

Par M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Prenons pour origine des coordonnées le milieu O de la plus courte distance $2d$ de Δ, Δ', la direction de cette plus courte distance pour axe des x, la bissectrice de l'angle formé par les parallèles à Δ, Δ' menées par l'origine pour axe des z, et enfin, pour axe des y, une perpendiculaire au plan xOz.

I. Les équations des droites données seront

$$(\Delta)\qquad \begin{cases} x - d = 0, \\ y - mz = 0; \end{cases}$$

$$(\Delta')\qquad \begin{cases} x + d = 0, \\ y + mz = 0; \end{cases}$$

m étant un coefficient donné ainsi que d.

L'équation d'une surface du second ordre passant par Δ, Δ' sera

$$\begin{aligned}(x+d)[\lambda(x-d)+\mu(y-mz)]\\ +(y+mz)[\lambda_1(x-d)+\mu_1(y-mz)]=0,\end{aligned}$$

ou, en effectuant les calculs et ordonnant,

$$(\text{S})\quad \begin{cases} \lambda x^2 + \mu_1 y^2 - m^2\mu_1 z^2 + m(\lambda_1-\mu)zx + (\lambda_1+\mu)xy \\ \qquad - d(\lambda_1-\mu)y - dm(\lambda_1+\mu)z - \lambda d^2 = 0, \end{cases}$$

λ, λ_1, μ, μ_1 étant des indéterminées.

Les coordonnées du centre satisfont aux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\lambda x + (\lambda_1+\mu)y + m(\lambda_1-\mu)z = 0, \\ (\lambda_1+\mu)x + 2\mu_1 y - d(\lambda_1-\mu) = 0, \\ (\lambda_1-\mu)x - 2m\mu_1 z - d(\lambda_1+\mu) = 0. \end{cases}$$

Or on voit sans peine que, si l'on y fait $x = 0$, l'une des trois équations est alors une conséquence des deux autres. Donc le plan $x = 0$ contient tous les centres, et les relations (1) se réduisent à

$$(2)\qquad \begin{cases} 2\mu_1 y - d(\lambda_1-\mu) = 0, \\ 2m\mu_1 z + d(\lambda_1+\mu) = 0. \end{cases}$$

Nous aurons deux autres relations entre les indéterminées λ, λ_1, μ, μ_1, en nous servant de l'équation en S.

On sait que si l'on appelle généralement ρ la longueur algébrique de l'un des axes de la surface à centre

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = H,$$

les axes des coordonnées étant rectangulaires, on a

$$S = \frac{H}{\rho^2}.$$

L'équation en S devient alors

$$\begin{vmatrix} A - \frac{H}{\rho^2} & B'' & B' \\ B'' & A' - \frac{H}{\rho^2} & B \\ B' & B & A'' - \frac{H}{\rho^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Appelons h^2 la somme et $-l^6$ le produit des carrés des longueurs algébriques des axes; l'équation ci-dessus nous donnera

$$(3)\left\{\begin{array}{l} h^2(AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'') \\ \quad = H(AA' + A'A'' + A''A - B^2 - B'^2 - B''^2), \\ -l^6(AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'') = H^3. \end{array}\right.$$

Mais si l'on rapporte la surface (S) à son centre, son équation devient

$$\begin{aligned} \lambda x^2 + \mu_1 y^2 - m^2 \mu_1 z^2 + m(\lambda_1 - \mu) zx \\ + (\lambda_1 + \mu) xy = \frac{d^2}{\mu_1}(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu). \end{aligned}$$

En faisant les substitutions dans les équations (3) et effectuant les calculs, on obtient

$$(4)\left\{\begin{array}{l} 4m^2\mu_1^2(h^2 - d^2) - d^2(1 + m^2)(\lambda_1^2 + \mu^2) \\ \qquad + 2d^2(1 - m^2)(2\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu) = 0, \\ d^6(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu)^2 - l^6 m^2 \mu_1^4 = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination se fait maintenant facilement entre les équations (2) et (4). On trouve

$$(A) \quad d(y^2 + m^4 z^2) - m^2 d(h^2 - d^2) \mp ml^3(1 - m^2) = 0.$$

Le lieu est donc composé de deux ellipses concentriques situées dans le plan yOz.

Pour $m = 1$, ce qui correspond au cas où Δ et Δ' sont rectangulaires, les deux ellipses se réduisent à un cercle

$$y^2 + z^2 = h^2 - d^2.$$

II. Si o, β, γ sont les coordonnées du centre particulier I de l'une des surfaces (S), les équations de la droite DD' seront

$$x = p(z - \gamma),$$
$$y - \beta = p(z - \gamma),$$

avec les conditions

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} p(\beta - m\gamma) + d(q - m) = 0, \\ p(\beta + m\gamma) - d(q + m) = 0. \end{array} \right.$$

Les coordonnées des points D et D' sont alors

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = d, \\ y = \dfrac{m(d + p\gamma)}{p}, \\ z = \dfrac{d + p\gamma}{p}; \end{array} \right.$$

$$(D') \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -d, \\ y = \dfrac{m(d - p\gamma)}{p}, \\ z = -\dfrac{(d - p\gamma)}{p}. \end{array} \right.$$

Le carré de DD' sera donc, après réductions,

$$4d^2 + 4m^2\gamma^2 + \frac{4d^2}{p^2},$$

qui devient, en éliminant p au moyen des relations (5),

$$4d^2 + \frac{4(\beta^2 + m^4\gamma^2)}{m^2},$$

quantité constante, si l'on tient compte de (A); pour $m = 1$,

$$DD' = 2h.$$

III. Les plans menés en D, D', perpendiculairement à Δ et Δ', sont évidemment parallèles à l'axe des x. Le lieu de leur intersection est donc un cylindre parallèle à cet axe.

Du reste, les équations des deux plans étant

$$(6) \qquad \begin{cases} p(my + z) - (1 + m^2)(d + p\gamma) = 0, \\ p(my - z) - (1 + m^2)(d - p\gamma) = 0, \end{cases}$$

et β et γ vérifiant l'équation (A), on obtient, en éliminant β, γ, p et q entre les équations (A), (5) et (6), l'équation du lieu, qui est

$$(B) \quad dm^4(y^2 + z^2) = m(m^2 + 1)^2[md(h^2 - d^2) \pm l^2(1 - m^2)].$$

Pour $m = 1$, elle devient

$$y^2 + z^2 = 4(h^2 - d^2).$$

QUESTION.

1110. On construit, dans le cercle trigonométrique, l'arc $2a = AC$, $\sin 2a = CP$, le point P' symétrique de P par rapport à OC, D milieu de la corde AC et les droites P'D, P'P. Prouver que l'on a, aux signes près,

$$P'D = \sin 3a, \quad PP' = \sin 4a.$$

Si l'on construit $\cos 2a = CR$ et R' symétrique de R par rapport à OC, on aura, aux signes près,

$$R'D = \cos 3a, \quad P'R = \cos 4a.$$

(Communiqué par M. Ch. Legrand, proviseur du lycée Condorcet.)

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

GÉOMÉTRIE DE POSITION

OU

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

PAR L. BERTRAND
PROFESSEUR AGRÉGÉ A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET LETTRES DE GENÈVE

PREMIÈRE PARTIE, IN-8, AVEC DE NOMBREUSES FIGURES DANS LE TEXTE
PRIX : 6 FRANCS

En envoyant à la librairie de Gauthier-Villars un mandat sur la Poste ou des timbres-poste, l'ouvrage sera adressé franco dans toute la France.

La géométrie de position a un double avantage. En première ligne, elle offre des ressources éminemment fécondes pour la recherche des propriétés des figures et se distingue par une des méthodes les plus simples et les plus générales. Mais c'est surtout au point de vue des applications que cette géométrie rend des services signalés. Elle permet en effet de résoudre avec une remarquable aisance un très-grand nombre de problèmes, alors que l'emploi de l'analyse nécessiterait

une longue série de calculs. Le dessin technique tend à s'imposer de plus en plus dans les arts de construction, surtout depuis que la précision des instruments nous fournit une approximation complètement suffisante. On sait que Monge parvint avec les procédés de la géométrie descriptive à traiter d'une manière ingénieuse les questions les plus ardues, et cependant la théorie des projections était alors dans l'enfance. Grâce aux travaux de Chasles, Poncelet, Steiner, etc., cette branche a fait d'immenses progrès. Mais la France, qui a contribué à ce développement dans une très-large proportion, semble en avoir laissé tout le fruit aux nations voisines. La géométrie de position figure, en général, dans les programmes des écoles polytechniques et des universités étrangères, tandis qu'elle est presque ignorée dans nos établissements d'instruction supérieure.

En publiant le présent ouvrage, l'auteur n'a pas la prétention de combler une lacune ; il a cherché, par une exposition simple et méthodique, à rendre plus abordable une science dont le rôle est tous les jours plus important.

TABLE DES MATIÈRES
DE LA PREMIÈRE PARTIE

(Les articles précédés d'un astérisque peuvent être omis lors d'une première lecture.)

Relations entre les angles projectifs. — Angles formés par les rayons correspondants avec les rayons limites. — Rayons des angles nuls. — Angles projectifs égaux. — Centre projectif. — Situation en perspective. — Equation entre deux faisceaux projectifs.

* *Deux feuillées projectives en général.* — * Analogie avec deux faisceaux projectifs. — * Axe projectif. — * Situation en perspective.

Deux lignées projectives sur une même droite. — Du sens. — Points doubles. — Construction des points doubles. — Propriétés des points doubles.

Deux faisceaux projectifs autour d'un point et dans un plan. — Propriétés des rayons doubles.

* *Deux feuillées projectives autour d'une même droite.*

Lignées projectives en involution. — Définition. — Points conjugués. — Point central. — Points doubles. — Involution dans le polygone complet de quatre sommets. — Constructions d'un point conjugué. — Projection sur le cercle. — Construction des points doubles. — Propriétés métriques. — * Propriétés des lignées involutoires à points doubles imaginaires. — Equation de l'involution sur une droite. — Division harmonique sur une droite.

Faisceaux projectifs en involution. — Définition — Eléments conjugués. — Eléments doubles. — Eléments rectangulaires. — Involution rectangulaire. — Propriétés métriques. — Equation. — Division harmonique autour d'un point.

* *Feuillées projectives en involution.*

Résumé.

GENÈVE. — IMPRIMERIE COOPÉRATIVE, RUE DU CONSEIL-GÉNÉRAL, 8

ANNUAIRE POUR L'AN 1873, publié par le BUREAU DES LONGITUDES avec une Notice scientifique sur la CONSTITUTION PHYSIQUE DU SOLEIL, par M. *Faye*, Membre de l'Institut). In-18............... 1 fr. 25 c.

ANNUAIRE MÉTÉOROLOGIQUE DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, pour l'an 1873. 2e année. 1 volume in-18..................... 2 fr.

L'Annuaire météorologique résume chaque année les travaux accomplis, dans le cours de l'année précédente, par l'Observatoire et par ses nombreux collaborateurs des départements. Les observations météorologiques anciennes et nouvelles de l'Observatoire y sont résumées sous une forme qui permet de les utiliser sans effort. Il en est de même des observations de Météorologie et de Physique agricoles recueillies sur les divers points de la France. Leur réunion en tableaux fera connaître les éléments principaux du climat de notre pays. Après les tableaux viennent des Notices destinées à vulgariser les travaux des Commissions départementales.

CONNAISSANCE DES TEMPS ou DES MOUVEMENTS CÉLESTES, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, **POUR L'AN 1874**, publiée par le **BUREAU DES LONGITUDES**. In-8; 1872.

Sans Additions.............................. 3 fr. 50 c.
Avec Additions.............................. 6 fr. 50 c.

Les Additions contiennent : Sur la Table des positions géographiques. Additions et corrections qui ont été faites cette année à la Table géographique des principaux lieux, par M. de la Roche-Poncié. — Rapport sur la longitude de Panama, déduite des observations méridiennes de la Lune faites par M. G. Fleuriais, lieutenant de vaisseau. — Rapport sur la longitude de Yokohama, déduite des observations méridiennes de la Lune faites par M. G. Fleuriais, lieutenant de vaisseau.

HOÜEL (J.). — Cours de Calcul infinitésimal, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux. 2 Parties, in-4, de 376-336 pages lithographiées; 1871-1872.. 20 fr.

La seconde Partie, suivie d'un *Appendice sur la Théorie des quantités complexes,* se vend séparément.............................. 10 fr.

POINSOT, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Conseiller titulaire au Conseil de l'Université. — **Éléments de Statique,** précédés d'une NOTICE sur Poinsot par M. *J. Bertrand*, Membre de l'Institut. (*Ouvrage adopté par le Conseil de l'Instruction publique.*) 11e édition. Volume in-8, avec planches; 1873.............................. 6 fr.

SALTEL. — Sur l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et surfaces géométriques. In-4; 1872.

L'Auteur a abordé la construction de courbes géométriques d'ordre quelconque par la féconde méthode de la transformation des figures, en faisant usage d'une transformation qu'il appelle *Desarguésienne*, ou plus simplement *Arguésienne*. « *Ses recherches*, dit M. Gilbert dans un Rapport à l'Académie royale de Belgique, *enrichissent cette partie importante et difficile de la Science de méthodes et de théorèmes qui seront vivement appréciés par les géomètres.* »

ANNA SOLARO (le P.), ancien Professeur de Physique au Lycée de Salerne. — **Recherches sur les causes et les lois des mouvements de l'atmosphère.** *Vents rectilignes.* Un beau volume in-8, avec 2 pl.; 1870. 12 fr.

IRN (G.-A.), Correspondant de l'Institut de France. — **Le monde de Saturne,** ses conditions d'existence et de durée; suivi d'une *Note* relative à l'expérience du pendule de Foucault. Lecture faite à la Société d'histoire naturelle de Colmar. In-8, avec planches; 1872............ 1 fr. 50 c.

RN (G.-A.), Correspondant de l'Institut de France. — **Sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne.** In-4; 1873.. 4 fr.

TABLE DES MATIÈRES.

Février 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

April 21

(Deuxième Série.) — Mars 1873.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

MARS 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE

RÉDIGÉ PAR

M. GERONO,
Professeur de Mathématiques,

ET

M. CH. BRISSE,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1873 est en cours de publication.

On ne peut s'abonner que pour l'année entière.

L'abonnement est augmenté de 3 francs à partir de l'année 1869, et les prix pour les divers pays se trouvent dorénavant fixés ainsi qu'il suit :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Égypte, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Portugal, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége, Suède	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861), au lieu de 740 francs, 200 francs payables de la manière suivante : 100 francs comptant, et les 100 francs restants en un bon à trois mois à l'ordre de M. Gauthier-Villars, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes.

Les tomes X et XVI à XX (1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.

Les autres tomes de la première série se vendent séparément ...... 12 fr.

La **DEUXIÈME SÉRIE**, commencée en 1862, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les tomes I à V (1862 à 1866) ne se vendent pas séparément.

Les tomes suivants de la première série se vendent séparément. 15 fr.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES;

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

AVANT-PROPOS.

Dans mon Mémoire sur la classification des courbes du troisième ordre (*), je m'étais proposé d'exposer, ailleurs et avec plus de détails, une *Méthode de Géométrie analytique*, imaginée par moi depuis déjà vingt ans (**), et appelée d'abord *Méthode des équations géométriques*, désignation qu'ensuite je changeai pour lui substituer celle plus laconique d'*équipollences*.

Les principaux écrits où j'ai traité de cette méthode sont :

L'*Essai*, publié en 1835 dans le troisième volume des *Annales des Sciences du royaume Lombard-Vénitien*;

La *Méthode* (1837), dans le tome VII du même Recueil périodique;

Les *Solutions graphiques* (1843), dans le premier volume des *Mémoires de l'Institut impérial et royal de Venise*.

Soit parce que je me suis toujours astreint à une extrême concision, indiquant un grand nombre d'applications géométriques et mécaniques avant de m'être suffisamment étendu; soit parce que, dans une science aussi vaste que la Géométrie, les savants reculent à consacrer un peu de temps à l'étude d'une nouvelle méthode, et

(*) *Mémoires de la Société italienne des Sciences de Modène*, t. XXV, p. 1.
(**) La présente *Exposition* a été publiée en 1854.

préfèrent conserver celle qu'ils connaissent, et qui peut les conduire aux mêmes résultats; soit pour toute autre raison, les géomètres ne prêtèrent point attention à la méthode proposée par moi, ni aux solutions d'une incontestable simplicité que j'en ai déduites dans les écrits cités ci-dessus et dans quelques autres.

Néanmoins, plusieurs des principes établis par moi tendent de plus en plus à être adoptés : M. de Saint-Venant montre les avantages que présente la considération des *quantités géométriques;* ses *sommes géométriques* sont précisément celles auxquelles, de mon côté, je donnai d'abord le même nom, mais que j'appelai ensuite *composées-équipollentes;* et M. Cauchy a fait remarquer, à plusieurs reprises, toute la valeur de la théorie de M. de Saint-Venant. Je crois donc qu'il n'est pas inopportun de revenir encore une fois sur la méthode des équipollences, en l'exposant avec la plus grande clarté possible.

Cette méthode donne satisfaction au désir exprimé par Carnot, de trouver un algorithme qui représente à la fois la grandeur et la position des diverses parties d'une figure; il en résulte directement des solutions graphiques, élégantes et simples, des problèmes de Géométrie. La méthode des équipollences comprend, comme cas particuliers, celles des coordonnées parallèles ou polaires, le calcul barycentrique, etc.; les problèmes relatifs aux courbes y sont résolus d'une manière générale, sans préférence accordée à un mode de représentation plutôt qu'à un autre; les calculs en sont plus rapides que ceux de la Géométrie analytique, et les résultats se trouvent exprimés sous une forme plus simple.

La distinction des parties positives et négatives est essentielle dans la méthode des équipollences; en sorte que la *corrélation* des figures est une conséquence nécessaire de l'algorithme, sans qu'il soit besoin d'aucune

remarque spéciale, ce qui enlève toute cause d'erreur. Le lecteur auquel les principes de la *Géométrie de position* sont familiers me suivra sans peine dans le petit nombre des conventions sur lesquelles s'appuie la méthode; peut-être arrivera-t-il à rendre celle-ci encore plus conforme aux procédés ordinaires; mais je n'ai pas jugé utile de sacrifier la concision des formules à une plus grande facilité. Les conventions seront aisées à retenir de mémoire; car elles sont conformes, les unes aux règles ordinaires relatives aux quantités positives et négatives, les autres à la composition bien connue des forces.

Les équipollences expriment des relations entre des droites considérées, non-seulement quant à leurs grandeurs, mais aussi quant à leurs directions (ou inclinaisons); en sorte qu'elles diffèrent essentiellement des équations, qui expriment seulement des relations entre quantités réelles. Néanmoins, le calcul des équipollences suit précisément les mêmes règles que le calcul des équations, ce qui offre un grand avantage.

L'étendue et les progrès de la Géométrie sont tels, que, plutôt que de se refuser à toute étude des nouvelles méthodes, il faudra peut-être avant peu tenir compte seulement des méthodes générales, afin d'avoir en sa possession un plus grand nombre de moyens pour arriver à la connaissance des vérités dont on a besoin. Il est effectivement impossible désormais d'avoir présentes à l'esprit toutes les vérités qui viennent à être découvertes.

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES.

Définitions et notations préliminaires.

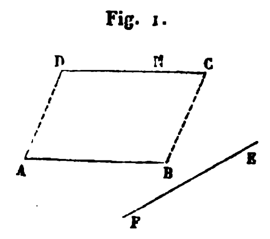
1. Nous nous proposons d'exprimer les relations de grandeur et de position qui ont lieu entre les droites d'une figure, de manière à pouvoir en déduire celles qui constituent un théorème de Géométrie, ou servent à la résolution d'un problème. Si, dans l'équipollence exprimant la condition d'un problème, figure un seul point inconnu, l'équipollence se résoudra par rapport à ce point, d'après les mêmes règles que celles qui régissent la résolution des équations, et la formule finale indiquera, sans qu'il soit besoin d'aucune considération géométrique, quelle est la construction graphique que l'on doit faire pour obtenir la solution désirée, laquelle sera presque toujours l'une des plus simples que l'on pourrait trouver en employant les considérations artificielles et indirectes de la Géométrie dite *synthétique*.

2. Nous indiquerons une droite, comme d'habitude, au moyen des deux lettres qui marquent ses extrémités; toutefois, on doit remarquer qu'on exprime ainsi, non-seulement la grandeur de la droite, mais bien sa grandeur et sa direction à la fois. C'est pourquoi, par exemple, il n'est pas permis de remplacer MQ par QM. Ces deux notations MQ, QM indiquent bien une même droite, mais prise en sens opposés. La confusion de l'une avec l'autre serait pareille à celle d'une quantité positive avec une quantité négative d'égale valeur; nous verrons, en effet, que MQ est identique avec — QM, et — MQ avec

QM. Cette convention est souvent admise dans la Géométrie moderne.

3. Pour qu'une droite puisse être substituée à une autre, il ne suffit pas qu'elle lui soit égale (c'est-à-dire d'égale grandeur); mais il faut en outre que ces deux droites soient parallèles et dirigées dans le même sens. Deux droites qui ont de telles relations sont dites *équipollentes;* et, dans le calcul des équipollences, on peut toujours substituer à une droite une autre qui lui soit équipollente. Ainsi la droite AB (*fig.* 1) est équipollente

Fig. 1.



à DC, et est seulement égale à EF; ce qu'on distingue au moyen de deux signes différents, en écrivant

$$\mathrm{AB} \bumpeq \mathrm{DC}$$

et

$$\mathrm{AB} = \mathrm{EF}.$$

D'après cela, il pourrait se produire quelque confusion en employant, dans un même calcul, des équipollences telles que $\mathrm{AB} \bumpeq \mathrm{DC}$, et de simples égalités telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{EF}$; aussi, pour indiquer la grandeur d'une droite indépendamment de son inclinaison, se servira-t-on de la caractéristique gr.. Par exemple

$$\mathrm{gr.AB} = \mathrm{gr.EF}$$

indiquera que les longueurs de ces droites sont égales. Au

sujet de ces longueurs de droites, et en général au sujet des grandeurs exprimées, à la manière de l'Algèbre, au moyen de lettres (ordinairement en petits caractères italiques), on peut remarquer qu'il n'y a aucun inconvénient à employer, dans un même calcul, des équations relatives aux grandeurs et des équipollences relatives aux droites.

4. Une droite est dite *équipollente* à une autre, multipliée par un nombre positif, quand ces deux droites ont entre elles ce nombre pour rapport, et qu'elles sont en outre parallèles et dirigées dans le même sens. Ainsi l'on dira que DN est équipollente à AB, multipliée par le nombre positif n, et l'on écrira

$$\mathrm{DN} \triangleq n\,\mathrm{AB},$$

lorsque gr. DN $= n$ gr. AB; et qu'en outre DN, AB sont parallèles et dirigées dans le même sens. Si le multiplicateur donné est un nombre négatif, les droites auront bien entre elles le rapport fixé par la valeur de ce nombre, et seront parallèles, mais dirigées en sens contraires.

Si, par exemple, on a

$$\mathrm{CN} \triangleq (n - 1)\,\mathrm{AB},$$

et que le nombre $n - 1$ soit négatif, les longueurs des droites CN, AB auront entre elles le rapport $(1 - n) : 1$, et en outre CN sera parallèle à AB et dirigée en sens contraire. De même, en employant NC, qui a une direction opposée à CN, nous pourrons écrire

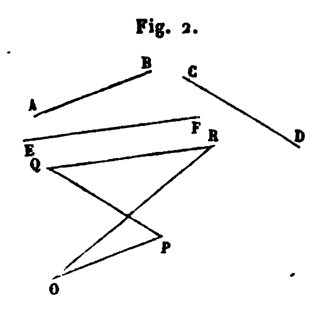
$$\mathrm{NC} \triangleq (1 - n)\,\mathrm{AB},$$

$(1 - n)$ étant un coefficient numérique positif. En général, on peut substituer à une droite quelconque CN la droite opposée NC, pourvu qu'en même temps on change le signe de son coefficient.

Sommes géométriques. — Équipollences polynômes.

5. D'après ce qui précède, se trouve définie la signification d'une équipollence à deux termes seulement, dont chacun renferme une seule droite. Voyons maintenant comment on réunit ensemble plusieurs droites, en tenant compte de leurs grandeurs et de leurs directions; au résultat de cette opération, nous donnerons le nom de *somme géométrique* ou de *composée-équipollente* (*). Pour mieux fixer les idées, imaginons qu'un voyageur parcoure une ligne brisée OPQR (*fig.* 2); le chemin

Fig. 2.



effectif et utile qu'il aura fait ainsi ne sera point égal à la longueur de la ligne brisée, mais équivaudra à la droite OR, par laquelle il serait également parvenu de O en R; nous appellerons cette droite OR la *somme géométrique* de toutes les droites qui constituent la ligne brisée.

Nous savons qu'en Mécanique une telle *somme géo-*

(*) Le nom plus simple de *somme géométrique* sera celui que nous emploierons en général; mais il est bon que le lecteur sache que la dénomination de *composée-équipollente*, s'il venait à la rencontrer, possède exactement la même signification.

métrique exprime la résultante des forces appliquées au point O, et respectivement équipollentes (c'est-à-dire égales, parallèles et dirigées dans le même sens) avec OP, PQ, QR.

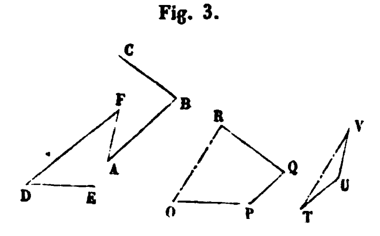
6. Pour construire la somme géométrique des droites AB, DC, EF, on mènera, par un point O quelconque, la droite OP équipollente à AB; puis à la suite PQ équipollente à DC, et QR équipollente à EF; OR sera la somme géométrique cherchée.

Il est facile de démontrer que, dans quelque ordre que l'on dispose les unes à la suite des autres les droites équipollentes aux droites données, on obtiendra toujours la même droite OR. En prenant autrement le point arbitraire O, on trouvera, pour somme géométrique, une autre droite, qui sera toujours équipollente à OR.

Si les droites étaient toutes parallèles, leur somme géométrique ne serait autre que leur somme algébrique, obtenue en tenant compte des signes.

7. Ceci bien compris, il sera très-facile d'interpréter

Fig. 3.



et de construire une équipollence polynôme. Soit, par exemple (*fig.* 3),

$$DE + \tfrac{1}{2}AB - CB \triangleq \tfrac{1}{3}DF - nAF.$$

Si l'on mène OP équipollente à DE, puis à la suite

PQ $\triangleq$ $\frac{1}{2}$AB (selon la signification du n° 4), et encore à la suite QR $\triangleq$ — CB $\triangleq$ BC, on obtiendra ainsi la composée OR, laquelle sera équipollente à la composée TV, obtenue en menant, par un point quelconque T, la droite TU $\triangleq$ $\frac{1}{2}$ DF, et à la suite UV $\triangleq$ — n AF, n étant un nombre donné, qui, dans le cas de la *fig.* 3, est nécessairement négatif.

8. On peut changer la disposition des termes d'une équipollence; on peut aussi faire passer un terme d'un membre dans l'autre, pourvu que, selon la règle établie pour les équations, on change le signe; l'équipollence demeure ainsi exacte. Par exemple, l'équipollence précédente peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{DE} + n\,\mathrm{AF} - \frac{1}{2}\mathrm{DF} \triangleq 0,$$

c'est-à-dire qu'en construisant la somme géométrique des cinq termes du premier membre on trouve un polygone fermé au lieu d'une ligne brisée.

Nous pouvons aussi multiplier tous les termes d'une équipollence par un même nombre, sans en altérer l'exactitude. Cela résulte de la proportionnalité de deux figures homothétiques, c'est-à-dire dont les côtés sont respectivement parallèles.

En un mot, nous pouvons exécuter, sur les équipollences, des opérations précisément analogues à celles qu'on pratique sur les équations algébriques, et qui dépendent de l'addition ou de la soustraction, et aussi de la multiplication et de la division *par des nombres*.

9. Remarquons incidemment que si, dans l'équipollence des deux numéros précédents, nous supposons inconnue la droite AF, quand bien même nous ne connaîtrions pas n, l'équipollence servirait néanmoins à in-

diquer la direction de AF, qui est parallèle à UV, TV étant équipollente à OR. Nous verrons toujours que, tandis qu'une équation sert à déterminer une seule quantité, une équipollence en détermine deux; et, en effet, lorsqu'elle détermine une seule droite, cela revient encore à déterminer deux quantités, savoir : la longueur de cette droite et son inclinaison.

Règles relatives aux grandeurs et aux inclinaisons.

10. La composition ou somme des droites, établie précédemment, nous montre évidemment que, dans le calcul des équipollences, on a la proposition suivante :

Règle I. — *Quels que soient les trois points* A, B, C, *on a toujours*

$$AB + BC \bumpeq AC. \qquad (1)$$

Cette équipollence peut indifféremment prendre les formes

$$BC \bumpeq AC - AB, \qquad (2)$$

$$AB \bumpeq AC - BC, \qquad (3)$$

$$AB + BC + CA \bumpeq 0. \qquad (4)$$

Cette règle peut paraître une conséquence tellement immédiate des définitions, qu'elle ne valait pas la peine d'être énoncée à part; mais elle est d'un continuel usage pour substituer une droite à d'autres; il convient donc de se la rendre familière.

Nous y joindrons une règle pour distinguer d'un coup d'œil quelles sont les équipollences identiques par elles-mêmes, de manière qu'on puisse s'assurer de leur exactitude sans aucun effort d'esprit, et sans regarder le moins du monde la figure.

11. En vertu de la règle précédente (3), nous pouvons substituer à une droite MN quelconque le binôme MZ — NZ, Z étant un point complétement arbitraire. Si, en faisant, pour chacune des droites, une substitution analogue, il en résulte une expression identique, il en sera de même aussi de l'équipollence qui a servi de point de départ. Ainsi, par exemple,

$$BC \bumpeq AC - AB$$

est une équipollence identique, parce que la suivante l'est elle-même :

$$BZ - CZ \bumpeq AZ - CZ - (AZ - BZ).$$

Il en est de même de

$$AB + BC \bumpeq AD - CD,$$

puisque

$$AZ - BZ + BZ - CZ \bumpeq AZ - DZ - (CZ - DZ).$$

Mais si, au contraire, nous avions écrit par erreur $AB + CB \bumpeq AC$, nous reconnaîtrions la faute, en remarquant que $AZ - BZ + CZ - BZ$ n'est pas identique avec $AZ - CZ$.

12. Il nous reste à établir la signification des équipollences qui contiennent des produits ou des quotients de droites multipliées ou divisées entre elles. Dans ce but, il est nécessaire de se restreindre à la considération des figures situées dans un même plan; *tandis que tout ce que nous avons dit jusqu'à présent s'étend aussi à l'espace.*

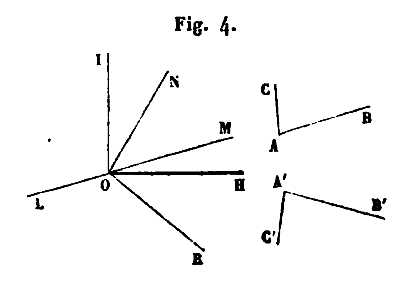
13. Établissons tout d'abord une convention qui rendra le langage plus rapide. Dans toute droite, nous ob-

servons deux choses : la *longueur* et la *direction;* pour calculer les *longueurs,* les géomètres anciens considéraient toujours les *rapports* entre deux droites; les modernes trouvèrent plus commode de considérer les grandeurs d'une manière absolue, en les comparant à une *unité de mesure* choisie arbitrairement; d'après cela, le *rapport* de deux droites résulte de la *division* de leurs *grandeurs.*

Par analogie, tandis que, jusqu'à présent, pour calculer les *directions* des droites, on a considéré les angles compris entre deux droites, nous trouvons plus commode, au lieu de cela, de considérer les *inclinaisons* des droites d'une manière absolue, par comparaison avec une droite choisie arbitrairement pour *origine des inclinaisons;* d'après quoi l'*angle* de deux droites sera la *différence* de leurs *inclinaisons.* Nous désignerons l'inclinaison d'une droite par la caractéristique inc., comme déjà (3) nous avons désigné la grandeur par gr.

14. Prenons pour origine des inclinaisons (*fig.* 4) la droite OH (que, pour fixer les idées, nous supposerons

Fig. 4.



horizontale et dirigée de gauche à droite); nous appellerons *inclinaisons* de la droite OM l'angle HOM qu'elle forme avec OH, en observant que les inclinaisons posi-

tives sont prises à droite et au-dessus (*), c'est-à-dire dans le sens HMIL, et que les inclinaisons prises dans le sens opposé HRL sont regardées comme négatives. D'après cela, comptant les inclinaisons de o à 360 degrés, l'inclinaison de la droite OR, par exemple, peut être considérée comme étant de —40 degrés ou de 320 degrés, c'est-à-dire qu'une différence de 360 degrés ne change pas l'inclinaison.

L'angle MON est égal à l'inclinaison de ON, moins l'inclinaison de OM :

$$\text{angle}\,MON = \text{inc.}\,ON - \text{inc.}\,OM.$$

On convient aussi que les angles positifs doivent se prendre dans le sens HMNI, et que tout angle se compte de la première à la troisième lettre. Ainsi l'angle NOM est négatif, parce qu'il est égal à inc. OM — inc. ON.

15. L'inclinaison de la droite AB est la même que celle de la droite OM, parallèle et dirigée dans le même sens. L'inclinaison de BA est la même que celle de OL, prolongement de MO. Ainsi

$$(1)\qquad \text{inc.}\,BA = \text{inc.}\,AB \pm 180^\circ.$$

On affecte 180 degrés du double signe, parce que, ainsi qu'on l'a dit, une différence d'inclinaison de 360 degrés ne produit aucun effet. Rappelons qu'en outre de (1) nous avons

$$(2)\qquad \text{angle}\,BAC = \text{inc.}\,AC - \text{inc.}\,AB,$$

(*) M. Bellavitis a changé depuis la convention sur le signe des inclinaisons. Nous conservons ici la première, comme plus conforme à celle habituellement admise pour les coordonnées polaires.

et aussi, en vertu de (1),

(3) $$\text{angle BAC} = \text{inc.CA} - \text{inc.BA}.$$

16. Nous avons vu ce qu'on doit entendre par une droite équipollente à la somme géométrique de deux ou plusieurs droites. Définissons maintenant ce qu'est une droite équipollente à un monôme formé par la multiplication ou la division du plusieurs droites. Si l'on a

(1) $$\text{GH} \triangleq \frac{\text{AB.CD}}{\text{EF}},$$

la droite GH non-seulement doit avoir la grandeur exprimée par l'équation

(2) $$\text{gr.GH} = \frac{\text{gr.AB}\,\text{gr.CD}}{\text{gr.EF}},$$

mais, en outre, son inclinaison doit être

(3) $$\text{inc.GH} = \text{inc.AB} + \text{inc.CD} - \text{inc.EF}.$$

Réciproquement, si les relations (2) et (3) existent simultanément, l'équipollence (1) aura lieu. De même, l'équipollence

(4) $$\text{OP} \triangleq \frac{\text{GH.IL}}{\text{MN}}$$

signifie

(5) $$\text{gr.OP} = \frac{\text{gr.GH}\,\text{gr.IL}}{\text{gr.MN}},$$

et

(6) $$\text{inc.OP} = \text{inc.GH} + \text{inc.IL} - \text{inc.MN}.$$

En substituant dans (4), (5), (6) les valeurs (1), (2), (3), nous verrons que l'équipollence

(7) $$\text{OP} \triangleq \frac{\text{AB.CD.IL}}{\text{EF.MN}}$$

comprend les deux conditions

$$(8)\qquad \text{gr.OP} = \frac{\text{gr.AB gr.CD gr.IL}}{\text{gr.EF gr.MN}},$$

$$(9)\quad \text{inc.OP} = \text{inc.AB} + \text{inc.CD} + \text{inc.IL} - \text{inc.EF} - \text{inc.MN}.$$

Il est bon d'observer que de (7) on déduit (8), en changeant l'équipollence en équation relative aux grandeurs, et (9) en opérant comme si l'on voulait prendre les logarithmes, mais en écrivant inc. au lieu de log. Ces deux règles serviront, d'une manière semblable, à interpréter une équipollence binôme quelconque.

L'équipollence (1) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\text{AB.CD} \bumpeq \text{EF.GH},$$

et exprime encore les deux conditions

$$\text{gr.AB gr.CD} = \text{gr.EF gr.GH},$$
$$\text{inc.AB} + \text{inc.CD} = \text{inc.EF} + \text{inc.GH}.$$

Si les membres de l'équipollence sont affectés de coefficients numériques, et qu'on ait, par exemple,

$$(10)\qquad \text{QR} \bumpeq \frac{n\,\text{AB.CD}}{\text{EF}},$$

n étant positif, nous aurons, en vertu de la relation (1),

$$\text{QR} \bumpeq n\,\text{GH},$$

formule à laquelle nous devrons donner la signification déjà établie au n° 4. Ainsi (10) exprimera que

$$\text{gr.QR} = n\,\text{gr.GH} = \frac{n\,\text{gr.AB gr.CD}}{\text{gr.EF}}$$

et que

$$\text{inc.QR} = \text{inc.GH} = \text{inc.AB} + \text{inc.CD} - \text{inc.EF}.$$

On voit que la condition relative aux inclinaisons est indépendante des coefficients numériques positifs. Nous avons déjà dit (4) qu'un coefficient négatif entraîne une différence d'inclinaison de 180 degrés.

17. De ce que nous venons d'établir sur les équipollences binômes, et auparavant (7) sur les équipollences polynômes dont chaque terme contient une seule droite, résulte l'interprétation de toute équipollence homogène, dans laquelle les droites sont combinées entre elles au moyen des signes de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division, et aussi des signes de l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines à indices numériques, ces deux dernières opérations se déduisant des deux précédentes à la manière accoutumée. Si, par exemple, on a l'équipollence (*)

$$AB . CD : EF + n CD^2 : AB - 2 FG \mathrel{\underline{\Omega}} 0,$$

que l'on construise (16) une droite LM telle, que $LM \mathrel{\underline{\Omega}} AB . CD : EF$, et si, en outre, $MN \mathrel{\underline{\Omega}} n CD^2 : AB$, l'équipollence proposée se réduira à

$$LM + MN - 2 FG \mathrel{\underline{\Omega}} 0$$

et exprimera que la somme géométrique des droites LM, MN, c'est-à-dire LN (10), est équipollente à 2FG.

18. En transportant, par la pensée, des équations aux équipollences tout ce système des significations spéciales attribuées aux signes $\mathrel{\underline{\Omega}}$, +, —, :, etc., on se convaincra aisément de cette vérité très-utile :

(*) Pour la commodité typographique, nous adoptons deux points : comme signe de la division, ce signe embrassant toutes les quantités qui suivent, jusqu'au premier + ou —.

Principe fondamental. — *On peut faire sur les équipollences relatives aux figures planes toutes les opérations et transformations qui sont légitimes pour les équations algébriques, et les équipollences qui en résultent sont toujours exactes.*

Si, par exemple, on multiplie une équipollence par PQ : RS, c'est la même chose que si l'on multipliait tous les termes par le rapport numérique gr. PQ : gr. RS et si l'on augmentait leur inclinaison de inc. PQ — inc. RS; en sorte que le polygone exprimé par l'équipollence se changera en un autre semblable, qui aurait tourné d'un angle égal à inc. PQ — inc. RS; si bien que l'on conservera toujours un polygone fermé.

(*A suivre.*)

DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE DÉCRITE PAR UN POINT D'UNE FIGURE MOBILE;

Par M. SAINT-LOUP,
Professeur à la Faculté de Besançon.

Lorsqu'une figure invariable se déplace dans un plan, on sait que ce mouvement peut être produit par le roulement d'une certaine courbe ou roulette liée à la figure mobile sur une autre courbe qu'on nomme la base de la roulette, et l'on démontre que, si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de ces deux courbes à leur point de contact, le rayon de courbure A de la courbe décrite par un point A quelconque du plan de la roulette est donné par la relation

$$(1)\qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{A-a}=\frac{1}{R_1\cos\theta}+\frac{1}{R_2\cos\theta},$$

qui conduit à la construction de Savary.

Dans cette formule, a désigne la distance du point mobile A au point de contact O, et θ l'angle de a avec la normale en ce point à la roulette.

Le but de cette Note est de donner la solution de la question suivante :

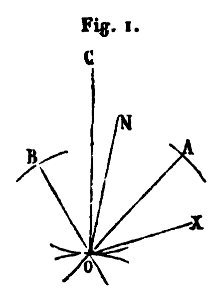
Une courbe étant donnée dans le plan d'une figure mobile, celle-ci reste constamment tangente à deux courbes fixes; déterminer le rayon de courbure de l'enveloppe de la première courbe en fonction des rayons de courbure des courbes données aux points où elles se touchent.

Pour cela, traitons d'abord cet autre problème plus simple :

Trouver le rayon de courbure de la trajectoire d'un point C *du plan d'une figure invariable dont deux points* A *et* B *décrivent des courbes données, en fonction des rayons de courbure en* A *et* B *des deux directrices.*

1. Menons en A et B les normales aux deux directrices, ces normales se rencontrent en un point O qui est le point de contact de la roulette qui produirait le mouvement de AB, avec la base sur laquelle s'effectuerait le rou-

Fig. 1.



lement. On sait que la normale à la trajectoire du point C passe aussi en O. Soient ON la normale commune aux

courbes de roulement et OX une direction quelconque, $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ les angles de OA, OB, OC, ON avec OX. D'après la formule rappelée plus haut, on a

$$(2) \qquad \cos(\nu - \alpha)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{A - a}\right) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};$$

la considération des points B et C donnerait lieu à des relations analogues. Il résulte de là que

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\cos(\nu - \alpha)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{A - a}\right) \\ &= \cos(\nu - \beta)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{B - b}\right) \\ &= \cos(\nu - \gamma)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{C - c}\right), \end{aligned} \right.$$

équations qui renferment comme inconnues ν et C; éliminons ν, on a, en développant les cosinus dans la première équation,

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\nu = \frac{\dfrac{A\cos\alpha}{a(A - a)} - \dfrac{B\cos\beta}{b(B - b)}}{\dfrac{A\sin\alpha}{a(A - a)} - \dfrac{B\sin\beta}{b(B - b)}}.$$

La seconde équation donnerait pour $\operatorname{tang}\nu$ une expression analogue; en les égalant, il vient

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &a\left(1 - \frac{a}{A}\right)\sin(\beta - \gamma) \\ &+ b\left(1 - \frac{b}{B}\right)\sin(\gamma - \alpha) \\ &+ c\left(1 - \frac{c}{C}\right)\sin(\alpha - \beta) = 0: \end{aligned} \right.$$

c'est la relation cherchée.

Les signes des différences $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$, $\alpha - \beta$ sont

définis par la figure. $A - a$, $B - b$, $C - c$ sont positifs quand les rayons de courbure A, B, C sont supérieurs aux distances a, b, c et dirigés du même côté que le point O par rapport aux points A, B, C.

2. Prenons

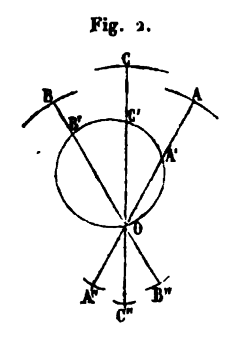
$$AA' = \frac{a^2}{A}, \quad BB' = \frac{b^2}{B}, \quad CC' = \frac{c^2}{C};$$

l'équation (5) peut s'écrire

$$(6) \quad OA' \sin(\beta - \gamma) + OB' \sin(\gamma - \alpha) + OC' \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Or, si par un point O d'une circonférence on mène trois droites OA', OB', OC' terminées à la circonférence, ces

Fig. 2.



droites représentent les cosinus des angles α, β, γ qu'elles font avec le diamètre mené par le point O, et on a l'identité

$$\cos\alpha \sin(\beta - \gamma) + \cos\beta \sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

comme on peut s'en assurer en développant; donc la relation (6) exprime que les trois points A', B', C' sont sur un même cercle passant par le point O. La construction de deux de ces points A' et B' déterminera donc le troi-

sième C', et on voit que le rayon de courbure C est une troisième proportionnelle à c ou OC et à CC'.

C'est la construction à laquelle arrive M. Transon par la considération du cercle de roulement (*Journal de Mathématiques*, 1845).

Soient A'', B'', C'' les centres de courbure, en sorte que

$$AA'' = A, \quad BB'' = B, \quad CC'' = C,$$

on a

$$OA'' = A - a, \quad OB'' = B - b, \quad OC'' = C - c.$$

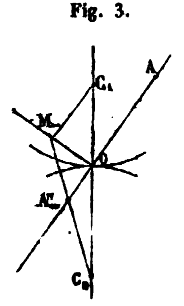
Désignons ces trois longueurs par a'', b'', c'', l'équation (5) prendra la forme

$$(7) \qquad \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a''}} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b''}} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\frac{1}{c}+\frac{1}{c''}} = 0,$$

dans laquelle les dénominateurs sont les sommes des inverses des distances du point O au point décrivant et à son centre de courbure.

3. En se reportant à la construction de Savary, on voit

Fig. 3.



que, si le point décrivant A s'éloigne indéfiniment sur OA, le centre de courbure A'' se rapproche du point O et vient en A''_∞, point que l'on obtient en menant $C_1 M_\infty$ pa-

rallèle à AO et joignant M_∞ à C_2, et l'on a

$$OA''_\infty = A - a,$$

quand A et a deviennent infinis.

Cela posé, si l'on considère une courbe Γ faisant partie du système des points A et B, et que l'on mène du point O une normale $O\Gamma$ à cette courbe, le point Γ ainsi déterminé est le point de contact de la courbe Γ avec son enveloppe. Des courbes équidistantes de Γ ont pour enveloppes des courbes parallèles à l'enveloppe de Γ; toutes ces courbes ont, comme on sait, au point où elles rencontrent $O\Gamma$, leurs centres de courbure au même point Γ'', lequel est aussi le centre de courbure de la trajectoire décrite par le point g centre de courbure de la courbe Γ.

Il résulte de là que, si le système mobile est formé des deux points A et B et de la courbe Γ, on pourra lui appliquer la relation (5) en substituant à la courbe Γ le point g qui remplace ainsi le point C précédemment considéré.

Dans cette relation, c désignera la distance Og, et C désignera le rayon de courbure de la courbe décrite par le point g et dont le centre de courbure est en Γ'' centre de courbure de l'enveloppe de Γ.

4. Dans le cas particulier où la courbe Γ est une droite, il résulte de la remarque qui précède que, pour le point g alors situé à l'infini, on a $C - c = O\Gamma''$; cette distance doit être comptée en sens contraire de OC quand elle est positive.

La relation (5) devient donc

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & a\left(1-\frac{a}{A}\right)\sin(\beta-\gamma) \\ & \quad + b\left(1-\frac{b}{B}\right)\sin(\gamma-\alpha) + (C-c)\sin(\alpha-\beta) = 0, \end{aligned} \right.$$

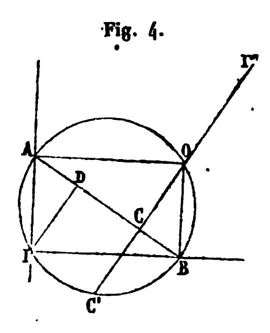
et on peut l'écrire en observant que $O\Gamma''$ est compté en sens inverse de OA' et de OB',

(9) $$OA' \sin(\beta - \gamma) + OB' \sin(\gamma - \alpha) - O\Gamma'' \sin(\alpha - \beta) = 0;$$

elle est donc renfermée dans l'équation (6), si au point C' on substitue le point Γ''. Ainsi le point Γ'' coïncide avec le symétrique du point C' par rapport au point O.

5. Cherchons comme application le rayon de courbure de l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui s'appuie sur deux droites fixes; les points A' et B' coïncident alors avec les points A et B; menons les normales AO et BO, puis la normale OC à la courbe mobile AB.

Fig. 4.



Cette normale vient rencontrer le cercle en C'; prenant $O\Gamma'' = OC'$, Γ'' sera le centre de courbure de l'enveloppe de AB pour le point C, et comme $OC = ID$, on voit que *le rayon de courbure en un point de l'enveloppe est triple de la distance du centre de l'enveloppe à la tangente au point considéré.*

Ce résultat est aisé à vérifier par le calcul, car l'équation de l'enveloppe est, comme on sait,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Le rayon de courbure en un point C (x, y) est, d'après l'expression connue de ρ,

$$\rho = 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}l^{\frac{1}{3}};$$

d'autre part, la distance ID du centre à la tangente est

$$\frac{l^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}l^{\frac{1}{3}}.$$

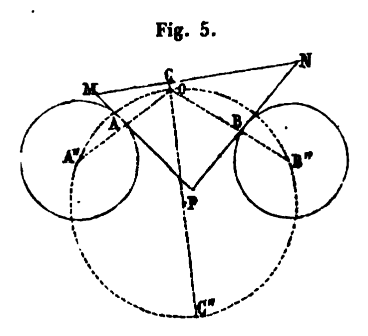
Ainsi $\rho = 3\text{ID}$.

6. Si nous considérons un triangle lié à la figure mobile, on voit d'après ce qui précède que :

Les centres de courbure des enveloppes des côtés d'un triangle mobile sont situés sur un même cercle passant par le point de concours O *des normales aux trois enveloppes menées aux points de contact avec les côtés du triangle.*

7. Comme application, considérons un triangle dont deux côtés restent tangents à deux courbes; cherchons le rayon de courbure de l'enveloppe du troisième côté.

Fig. 5.



Soit MNP le triangle dont les côtés MP, NP restent tangents aux deux cercles A″ et B″; soient A et B les points

de contact, $A''A$, $B''B$ les normales qui se rencontrent en O; abaissons OC, C sera le point de contact de MN avec son enveloppe; traçons le cercle $A''B''O$, le centre de courbure C'' doit être sur ce cercle au point où il est rencontré par OC; observons maintenant que le cercle $A''B''O$ est invariable, car les points A'' et B'' sont fixes et l'angle $A''OB''$ constant supplémentaire de P. Le point C'' reste donc constamment sur le cercle $A''OB''$, et comme ce cercle ne saurait être le lieu des centres de courbure de l'enveloppe de MN, il en résulte que ce point C'' est fixe. C'est ce que l'on reconnaît directement en observant que les angles $A''OC''$, $B''OC''$ sont constants comme respectivement égaux à M et N. Donc l'enveloppe de MN est un cercle.

8. La proposition précédente peut être généralisée; car elle s'applique à un nombre quelconque de droites formant un polygone ou concourantes.

9. Laissant de côté le cas particulier où la courbe Γ est une droite, nous voyons qu'il résulte du § III que nous pouvons calculer le rayon de courbure d'une courbe décrite dans les conditions suivantes :

Étant donnés une courbe et deux points, la courbe glisse sur une courbe fixe : l'un des points décrit une trajectoire donnée; le second point décrit alors une courbe dont la formule (9) nous donne le rayon de courbure.

Si la courbe fixe se réduit à un point, la courbe mobile se trouve alors assujettie à passer par un point fixe.

10. *Application à la détermination du rayon de courbure du limaçon de Pascal.* — Par un point fixe C d'une circonférence, on trace une corde CA sur laquelle on prend, à partir du point A, une longueur AB con-

stante : le point B décrit le limaçon de Pascal. La courbe Γ

Fig. 6.

est ici la droite CB, la courbe fixe se réduit au point C, le point Γ'' coïncide avec ce point, et $O\Gamma'' = - OC$. L'application de l'équation (8) donne, pour déterminer le rayon de courbure B au point B,

$$OA(1 - 2)\sin BOC - OB\left(1 - \frac{OB}{B}\right)\sin AOC + OC \sin AOB = 0,$$

ou

$$\frac{OA.BC}{OB} + OB\left(1 - \frac{OB}{B}\right)\frac{AC}{OA} + OC^2\frac{AB}{OA.OB} = 0;$$

ce qui donne, pour le rayon de courbure B,

$$B = \frac{OB^3}{OB^2 + OC^2 + AC.BC},$$

résultat que l'on vérifie aisément à l'aide de l'équation de la courbe

$$r = OA\cos\theta + AB,$$

qui donne

$$\frac{dr}{d\theta} = - OA\sin\theta = - OC,$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = - OA\cos\theta = - AC.$$

Ces valeurs, substituées dans l'expression connue du

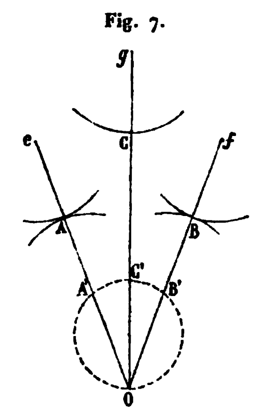
rayon de courbure, donnent

$$\rho = \frac{(CB^2 + OC^2)^{\frac{3}{2}}}{CB^2 + OC^2 + AC.CB} = \frac{OB^3}{OB^2 + OC^2 + AC.BC}.$$

11. Plus généralement, considérons le cas où une courbe glisse sur deux autres, et cherchons le rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe liée à la première.

Nommons ξ, η, ζ les rayons de courbure des courbes mobiles aux points où elles touchent leurs enveloppes; il

Fig. 7.



suffira de remplacer, dans l'équation (5), a et A par $a + \xi$, $A + \xi$, etc., ce qui donne

$$(10) \qquad (a + \xi)\left(1 - \frac{a + \xi}{A + \xi}\right)\sin(\beta - \gamma) + \ldots = 0.$$

Prenons

$$(11) \quad eA' = \frac{(a + \xi)^2}{A + \xi}, \quad fB' = \frac{(b + \eta)^2}{B + \eta}, \quad gC' = \frac{(c + \zeta)^2}{C + \zeta},$$

et la relation précédente devient

$$(12) \quad OA' \sin(\beta - \gamma) + OB' \sin(\gamma - \alpha) + OC' \sin(\alpha - \beta) = 0;$$

les points A′, B′, C′ sont donc sur une même circonférence passant en O.

L'équation (10) comprend la solution du problème qui nous occupe dans des cas particuliers très-généraux, parmi lesquels je mentionnerai les suivants :

Si les courbes fixes se composent d'un système de deux droites auxquelles une courbe mobile reste constamment tangente, on a alors A et B infinis, et l'équation (10) se réduit à

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a+\xi)\sin(\beta-\gamma)+(b+\eta)\sin(\gamma-\alpha)\\ &\qquad +(c+\zeta)\left(1-\frac{c+\zeta}{C+\zeta}\right)\sin(\alpha-\beta)=0; \end{aligned} \right.$$

les points A′ et B′ coïncident alors avec les points e et f.

Si en outre la courbe mobile C est une droite, le centre de courbure Γ″ de l'enveloppe de la droite est symétrique par rapport au point O du point C′ situé sur le cercle Oef.

Si les courbes fixes se réduisent à deux points, c'est-à-dire à deux cercles de rayon nul, la courbe mobile passe alors par deux points fixes. On a A et B nuls; l'équation (10) devient donc

$$\begin{aligned} &\frac{a}{\xi}(a+\xi)\sin(\beta-\gamma)+\frac{b}{\eta}(b+\eta)\sin(\gamma-\alpha)\\ &\qquad +(c+\zeta)\left(1-\frac{c+\zeta}{C+\zeta}\right)\sin(\alpha-\beta)=0. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le coëfficient de $\sin(\alpha-\beta)$ se réduit à C — c, si la courbe mobile C est une droite, car alors ζ est infini.

Comme application offrant une vérification facile, cherchons le rayon de courbure de l'enveloppe de la directrice d'une parabole constante qui glisse dans un angle droit C. Soient A et B les points de contact; menons les normales AO, BO; il est aisé de calculer les rayons de

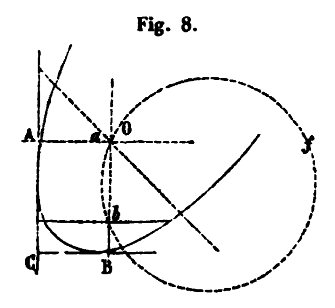
courbure de la parabole en A et B, et l'on trouve

$$\text{En A} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \xi = \frac{2b^2}{a} = \text{A}e,$$

$$\text{En B} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta = \frac{2a^2}{b} = \text{B}f.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation (13), donnent, en observant que les signes de a et b doivent être changés,

Fig. 8.



parce qu'ils sont portés en sens inverse de la direction suivie dans la figure précédente,

$$\left(-a + \frac{2b^2}{a}\right)\sin\text{BOC} + \left(-b + \frac{2a^2}{b}\right)\cos\text{BOC} - \text{O}\Gamma'' = 0,$$

car OC est la normale à la directrice; d'ailleurs

$$\text{tang}\,\text{BOC} = \frac{a}{b},$$

d'où il résulte

$$\text{O}\Gamma'' = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{OC}.$$

Et, en effet, la directrice de la parabole passant constamment par l'origine, l'enveloppe se réduit à un point, et le cercle de courbure coïncide avec le point C. Signalons en passant la relation très-simple qui lie les rayons

de courbure d'une parabole aux extrémités d'une corde focale, savoir :

$$\frac{1}{\xi^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\eta^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{p^{\frac{2}{3}}},$$

et remarquons aussi la construction géométrique très-simple des centres de courbure dans la parabole, qui résulte des valeurs de ξ, η, et qu'on peut formuler par le théorème suivant :

Dans la parabole, les portions de deux normales rectangulaires comprises entre la courbe et la directrice sont inversement égales à la moitié des rayons de courbure de la courbe suivant ces normales.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS INFINITÉSIMAUX RELATIFS AUX LIGNES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

L'expression des coordonnées des points d'une courbe gauche, en séries ordonnées suivant les puissances de l'arc, a permis de calculer avec élégance plusieurs des quantités qui se rapportent aux deux courbures des lignes. Je me propose de montrer combien l'emploi régulier de ces séries facilite le calcul de tous ces éléments, tels que le rayon de torsion, et permet d'établir simplement certaines propriétés infinitésimales dont la démonstration géométrique est délicate. Les lecteurs des *Annales* pourront remarquer l'expression de la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice : il y a eu ici même sur cette expression un débat entre MM. Ruchonnet et Gilbert (mai et août 1872); or je retrouve par un procédé tout différent du sien le résultat de M. Ruchonnet.

I. Je suppose connues les équations de la tangente, du plan osculateur et de la normale principale; il est inutile de les rappeler. Mais j'écris dès à présent, pour les employer plus tard, des résultats qu'on n'établit pas ordinairement dans le cas particulier que j'envisagerai. Étant donnée la droite

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c},$$

sa perpendiculaire commune avec l'axe des x a pour équations

$$bY+cZ=0,\quad (b^2+c^2)(X-x)+a(by+cz)=0,$$

et pour longueur

$$\pm\frac{cy-bz}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

II. Établissons aussi maintenant, pour ne pas interrompre notre étude géométrique, un théorème relatif aux changements d'axes coordonnés. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une courbe, s l'arc compté entre ce point et un point fixe de la courbe; la somme

$$\left(\frac{d^n x}{ds^n}\right)^2+\left(\frac{d^n y}{ds^n}\right)^2+\left(\frac{d^n z}{ds^n}\right)^2=\sum\left(\frac{d^n x}{ds^n}\right)^2$$

conserve une valeur constante pour chaque point, quand on prend d'autres axes, pourvu qu'ils soient aussi rectangulaires. En effet, les coordonnées primitives x, y, z sont liées aux nouvelles x', y', z' par des équations de la forme

$$x=x_1+ax'+a'y'+a''z',\ldots;$$

on différentie n fois les deux membres par rapport à s, qui est indifférent au choix des axes, puis on élève au

carré, et on ajoute les trois équations analogues; en tenant compte des relations connues qui existent entre les neuf cosinus a, a', a'',..., on obtient

$$\sum\left(\frac{d^n x}{ds^n}\right)^2 = \sum\left(\frac{d^n x'}{ds^n}\right)^2.$$

III. Cela posé, je prends pour axe des x la tangente en un point O, pour axe des y la portion de la normale principale qui est dirigée dans la concavité de la courbe; le plan des xy est donc osculateur en O; l'axe des z lui sera dirigé perpendiculairement, et du même côté que la partie de la courbe qui va dans le sens des x positifs. Je choisis pour variable indépendante la longueur s de l'arc compté à partir de l'origine.

Soit M un point de la courbe, qui sera le plus souvent infiniment voisin de O, en prenant alors s pour infiniment petit principal. J'appelle α, β, γ les angles de la tangente avec les axes, λ, μ, ν ceux de la normale principale, ξ, υ, ζ ceux de l'axe du plan osculateur.

A moins que le point O ne soit un point singulier, pour lequel les résultats ultérieurs seraient d'ailleurs en défaut, on pourra développer, par la formule de Maclaurin, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de s. Pour abréger, je supprime tout de suite quelques-uns des premiers termes de ces séries, dont l'absence est aisée à justifier, et j'écris les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = s + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \ldots, \\ y = b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + \ldots, \\ z = c_3 s^3 + c_4 s^4 + \ldots. \end{cases}$$

Les coefficients de ces séries ne sont pas indépendants

les uns des autres; on sait que l'on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos\alpha = 1 + 3a_3s^2 + 4a_4s^3 + \ldots,\\ \frac{dy}{ds} &= \cos\beta = 2b_2s + 3b_3s^2 + 4b_4s^3 + \ldots,\\ \frac{dz}{ds} &= \cos\gamma = 3c_3s^2 + 4c_4s^3 + \ldots.\end{aligned}\right.$$

La somme des carrés de ces expressions est égale à 1 quel que soit s; il faut donc que les coefficients des diverses puissances de cette variable soient nuls; d'où les relations

$$(3)\qquad a_3 = -\frac{2}{3}b_2^2,\quad a_4 = -\frac{3}{2}b_2b_3,\ldots.$$

IV. Évaluons les deux rayons de courbure au point O en fonction des coefficients des séries (1).

L'angle de contingence de l'arc infiniment petit OM est α. Mais l'équation (2) $\cos\gamma$ renferme s^2 en facteur : le complément de γ, c'est-à-dire l'angle de la tangente en M avec le plan osculateur en O est infiniment petit du deuxième ordre. En négligeant les quantités de cet ordre, on peut regarder γ comme égal à $\frac{\pi}{2}$, et $\cos\beta$ comme égal à $\sin\alpha$ ou même à α; d'où

$$\alpha = \cos\beta = 2b_2s + \ldots.$$

Le rayon de première courbure en O est donc

$$(4)\qquad R_0 = \lim\frac{s}{\alpha} = \frac{1}{2b_2}.$$

L'angle de torsion de l'arc OM est l'angle ζ du plan osculateur en M avec le plan des xy. Or, quand s est la variable indépendante, l'équation générale du plan os-

culateur peut s'écrire

$$\sum \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right) (X - x) = 0.$$

Je calcule les dérivées au moyen des séries (1), je remplace a_3 par sa valeur (3), je néglige les termes en s^3, et j'ai pour l'équation du plan osculateur en un point x, y, z de notre courbe

$$(5) \quad 3b_2c_3s^2X - 3(c_3s + 2c_4s^2)Y + [b_2 + 3b_3s + (6b_4 + 2b_2^3)s^2]Z = 0.$$

Tout d'abord cette équation nous démontre deux théorèmes dont la démonstration géométrique est délicate (*voir* le *Calcul différentiel* de M. Bertrand). Pour avoir l'intersection du plan osculateur correspondant à $s = 0$ avec le plan, ou les deux plans infiniment voisins, on sait qu'il faut égaler à zéro le terme indépendant de s, et le coefficient de s dans le premier cas, et en outre les coefficients de s^2, dans le second. On trouve ainsi pour le premier cas $Z = 0$, $Y = 0$, et pour le second $Z = Y = X = 0$. Donc :

La limite de l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins est la tangente menée par le point de contact de celui qui reste fixe, en sorte qu'une courbe gauche est l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ses plans osculateurs.

La limite de l'intersection de trois plans osculateurs voisins est le point de contact de l'un d'eux.

Mais le premier théorème nous donne l'angle de torsion cherché. Puisque le plan osculateur en M peut être considéré comme passant par l'axe des x tangent en O, son inclinaison sur le plan des xy est l'angle de sa trace sur le plan des yz et de l'axe des y; elle est mesurée par la limite du rapport $\frac{Z}{Y}$ tirée de l'équation (5), en y fai-

sant $X = 0$; donc

$$\zeta = \lim \frac{Z}{Y} = \frac{3c_{1,4}}{b_2}.$$

Le rayon de la seconde courbure en O devient, en tirant d'ailleurs la valeur de b_2 de l'équation (4),

$$(6) \qquad r_0 = \lim \frac{s}{\zeta} = \frac{b^2}{3c_1} = \frac{1}{6R_0c_1}.$$

(*A suivre.*)

CORRESPONDANCE.

Nous avons reçu de M. Adolph Steen, de Copenhague, un intéressant Mémoire relatif à la théorie des centres de pression. L'auteur, après avoir établi le théorème de Cotes : *Le centre de pression est le même que ceux de percussion et d'oscillation par rapport à la droite d'intersection des deux plans prise pour axe de rotation,* en tire des conséquences qui complètent la théorie.

Dans sa *Rivista di Giornali,* M. Bellavitis fait observer que la question 963, t. VIII, 2e série, n'est que la reproduction de la question 251, t. XI, 1re série.

M. Faure nous prie de regarder comme non avenue la question 1104, t. XI, 2e série, p. 527.

Extrait d'une lettre de M. Ph. Gilbert. — Dans les *Nouvelles Annales,* j'ai mis en doute l'exactitude de l'expression trouvée par M. Ch. Ruchonnet, pour la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice, et j'ai proposé une expression différente. M. Ruchonnet, dans le numéro d'août 1872, a maintenu l'exactitude de sa formule et cité un exemple qui prouve la fausseté de la mienne.

Je viens de profiter de quelques instants de loisir pour

revenir avec plus d'attention sur cette question, et j'ai reconnu que l'erreur est de mon côté : la formule de M. Ruchonnet est parfaitement exacte.

L'erreur ne réside pas, comme j'en étais sûr d'avance, dans mes formules générales, qui sont irréprochables, mais dans l'application que j'en ai faite à ce problème particulier. Et, chose curieuse, j'ai commis l'erreur même que je relève dans le même article, à charge d'un collaborateur du journal : dans un calcul d'infiniment petits, j'ai négligé des termes de même ordre que la grandeur à déterminer.

Le calcul rectifié, et il n'est pas plus compliqué pour cela, me donne, pour l'expression demandée,

$$\delta = \frac{R' ds^4}{24 R r T^2};$$

ds étant l'élément de l'arc; R, T, r les rayons de courbure, de torsion, et le rayon de la sphère osculatrice de la courbe proposée; R' le rayon de courbure du lieu du centre de la sphère osculatrice. L'identité de cette formule avec celle de M. Ruchonnet est visible.

Dans l'espoir de me réhabiliter aux yeux de vos lecteurs, je proposerai à M. Ruchonnet de démontrer, par les méthodes géométriques dont il se sert, les résultats suivants :

1° Si, à partir du point M d'une courbe gauche, on prend sur la courbe et sur le cercle osculateur en M' des arcs infiniment petits égaux $MM' = MM_1 = ds$, et si l'on joint $M'M_1$, les projections de $M'M_1$ sur la normale principale et sur la tangente à la courbe au point M sont respectivement des infiniment petits du troisième et du quatrième ordre, savoir :

$$\frac{u\, ds^3}{6R^2T}, \quad \frac{u\, ds^4}{8R^3T},$$

u étant la distance du centre de courbure au centre de la sphère osculatrice; R, T, ds les mêmes quantités que ci-dessus.

2° Si l'on projette l'arc infiniment petit MM′ sur le plan osculateur en M, la différence entre l'arc MM′ et sa projection est du cinquième ordre et égale à

$$\frac{1}{40}\,\frac{ds^5}{R^2T^2}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Questions d'Algèbre élémentaire; méthodes et solutions, avec un résumé des principales théories et un très-grand nombre d'exercices proposés, à l'usage des différentes classes de Mathématiques, par M. *A. Desboves*, agrégé et docteur ès sciences, professeur au lycée Condorcet. 1 vol. in-8°; 1873. Prix : 5 francs.

L'Ouvrage que M. Desboves offre aujourd'hui au public forme, avec ses *Questions de Géométrie* et ses *Questions de Trigonométrie*, un ensemble complet qui fera bien saisir aux élèves les rapports qui existent entre ces trois parties des Mathématiques élémentaires.

La première Partie est le résumé d'un cours très-complet d'Algèbre élémentaire. Les théories principales y ont été développées avec le plus grand soin, tandis que les théories faciles, qu'on trouve exposées de la même manière dans tous les Traités d'Algèbre, ont été seulement indiquées dans un programme très-détaillé. Immédiatement après l'exposé des règles du calcul algébrique, l'auteur a donné les formules relatives aux nombres d'arrangements, de permutations et de combinaisons, et aussi la formule de Newton, pour le développement de la puissance entière du binôme. On ne saurait évidemment habituer trop tôt

les élèves à ces idées d'ordre et de combinaison, auxquelles, comme le dit Poinsot, « on doit rapporter la théorie profonde des équations, celle des expressions imaginaires, et tout l'art des transformations algébriques ». L'auteur a introduit aussi des notions relatives à la continuité des fonctions et à leur représentation graphique, qui donneront aux élèves des idées plus nettes et plus étendues sur la variation des fonctions, qu'en se bornant à l'unique détermination de leurs *maxima* et *minima*.

La seconde Partie contient d'importants développements sur les matières traitées dans la première, les éléments de la théorie des congruences, la résolution des équations indéterminées à deux inconnues, etc. Des exercices nombreux et variés sont proposés, à la suite de questions développées que les élèves devront prendre pour modèle à suivre. Le professeur trouvera donc dans cette seconde Partie un texte tout préparé pour ses conférences.

Dans tout le cours du livre, l'auteur a beaucoup insisté sur la grande importance des identités algébriques, et en a déduit plusieurs beaux théorèmes de la théorie des nombres. Il en a également tiré un excellent parti dans l'étude directe de la variation de certaines fonctions qui se présentent à chaque instant dans les problèmes élémentaires.

Les méthodes de déduction, dont un aperçu avait déjà été donné dans les précédents Ouvrages de l'auteur, ont été développées avec le plus grand soin. Élève de Sturm, il a d'ailleurs puisé dans ses anciens cahiers de notes, et procuré ainsi à ses lecteurs la saveur de quelques élégantes solutions de l'illustre géomètre.

Nous signalerons enfin le sixième et le septième chapitre de la seconde Partie, qui contiennent l'analyse du premier volume de l'*Arithmétique universelle* de Newton, et dont on ne saurait trop recommander la lecture aux élèves.

Leçons de Trigonométrie rectiligne et sphérique, par *A. Cambier*, professeur de Mathématiques supé-

rieures. In-8° de 136 pages; 1872. Mons; Hector Manceaux, éditeur.

Les *Leçons* de M. Cambier se composent de deux parties distinctes, suivies d'un Appendice. La première partie traite de la Trigonométrie rectiligne, et comprend la goniométrie, la résolution des triangles et les applications au levé des plans. Dans les trois derniers chapitres de cette partie se trouvent exposés les propriétés angulaires du quadrilatère, les *maxima* et les *minima*, ainsi que les séries trigonométriques. Beaucoup de questions résolues paraissent entièrement nouvelles.

Les deux premiers chapitres de la Trigonométrie sphérique sont consacrés aux propriétés et à la résolution des triangles rectangles et des triangles quelconques. Le troisième chapitre, fort important et très-curieux, donne plusieurs théorèmes, peu connus, sur les triangles sphériques et de nombreuses applications à la géodésie, aux angles trièdres, aux polyèdres réguliers, au tétraèdre et à la sphère.

L'Appendice contient le développement de $\sin x$ et $\cos x$ avec la résolution des cas singuliers des triangles sphériques.

Tous les chapitres sont suivis d'un grand nombre d'exercices, de formules à vérifier et de théorèmes à démontrer. Ces exercices sont bien choisis, et imprimés dans un caractère différent de celui du corps de l'ouvrage.

Les cristalloïdes complexes a sommet étoilé, par M. le comte *Léopold Hugo*. Grand in-8°, avec 3 planches; 1873.

L'auteur a publié sur cette théorie trois brochures dont la dernière date de 1872. Il y a été conduit, comme le nom l'indique, par les considérations de la Minéralogie; aussi, malgré ce qu'elles ont d'essentiellement théorique, il ne faut pas les regarder comme des abstractions ne pouvant fournir d'applications pratiques. M. L. Hugo fait observer qu'une foule de monuments publics, d'œuvres d'art de toute espèce, sont construits d'après les règles qu'il donne et que l'instinct artistique avait devinées; la théorie pourra sans doute développer la pratique.

Un *cristalloïde* est formé par l'assemblage de plusieurs *onglets* de même formule; aussi l'auteur commence-t-il par définir l'*onglet*, dont on peut se faire une idée par le solide qui porte ce nom à propos de la sphère. On y considère un axe analogue au diamètre de la sphère, et une courbe appelée *directrice*, comme dans tout le mouvement.

Les volumes des onglets se mesurent au moyen d'un nombre appelé *coefficient*, qui multiplie le produit de la hauteur, prise sur l'axe, par la base de l'onglet, pour obtenir ce volume. Comme exemples de coefficients connus, nous citerons $\frac{1}{3}$ pour la pyramide et $\frac{2}{3}$ pour le problème d'Archimède.

Ce qui précède s'étend aux cristalloïdes, puisqu'un cristalloïde se compose d'onglets de même nature.

L'auteur donne aux cristalloïdes dont les onglets sont concaves vers l'axe le nom de *domoïdes*, et à ceux dont les onglets sont convexes le nom de *trémoïdes*; par conséquent, les trois courbes du second degré, prises comme directrices, donneront des *ellidomoïdes*, des *hyperdomoïdes* et des *paradomoïdes*, etc. Dans le cas particulier d'une ellipse à axes égaux, c'est-à-dire d'un cercle, on emploie les mots d'*équidomoïdes* et d'*équitrémoïdes*.

Les cristalloïdes complexes à sommet étoilé, dont l'auteur s'occupe dans sa dernière brochure, le conduisent à ce qu'il appelle les *solides imaginaires*, et dont il nous reste à parler; du reste, on peut en donner l'idée d'une manière directe.

Concevons, par exemple, un rectangle tournant autour de l'un de ses côtés et l'extrémité de l'autre décrivant une circonférence divisée en six parties égales; il est clair que le solide décrit sera un cylindre. Mais si, à la fin de chaque division, on imagine le rectangle générateur anéanti, pour ne reparaître qu'au commencement de la suivante, on aura ainsi, au lieu d'un cylindre complet, un solide composé de trois parties pleines et de trois autres vides

Au lieu de cela, si l'on considère le rectangle générateur n'existant qu'aux six divisions, on aura un solide complétement *imaginaire*, c'est-à-dire ne se composant que de ces di-

visions rectangulaires dans le cylindre : aussi l'auteur dit-il que les feuillets d'un livre ouvert et placé verticalement donnent une idée de ce dont il s'agit.

Enfin, au lieu de faire disparaître et reparaître périodiquement la surface génératrice, nous pouvons la supposer modifiée suivant certaines lois.

En résumé, nous voyons que ces travaux présentent beaucoup d'originalité en théorie; de plus, la théorie des cristalloïdes a offert déjà et offrira encore une foule d'applications pratiques, à propos des formes employées dans les arts et dans la construction d'édifices publics, dont plusieurs sont bien connus. C. H.

Elementi di Geometria projettiva di *Luigi Cremona*, t. I, texte et planches (184-XLIV). In-8; 1873. Prix : 3 fr. 50 c.

Nous rendrons prochainement compte de cet excellent Ouvrage.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1097

(voir 2e série, t. XI, p. 479);

Par M. Auguste MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Joignons deux points quelconques E, F *d'une circonférence à un point* O *pris arbitrairement sur le prolongement d'un rayon* CA *de cette circonférence. Désignons par* E', F' *les points de rencontre de ces droites avec la circonférence. Élevons aux points* E, F *des droites respectivement perpendiculaires à* EO, FO; *appelons* I *le point de rencontre de ces perpendicu-*

laires. On demande de démontrer que l'angle IOC *a pour mesure la demi-somme ou la demi-différence des arcs* E'A, F'A. (MANNHEIM.)

Pour le démontrer, je joins le point E au point F, le point E' au point F' (*). Les quatre points I, E, F, O sont sur une même circonférence, et par suite les angles IEF, IOF sont égaux (ou supplémentaires). Il en résulte que l'angle FEO est le complément de l'angle IOF; mais, dans le quadrilatère inscrit EFF'E', l'angle FEO est égal à l'angle OF'E'. Donc, les angles OF'E' et IOF étant complémentaires, la ligne F'E' est perpendiculaire à IO.

Si j'appelle M et N les points où les perpendiculaires menées par les points E et F rencontrent la circonférence, je démontrerai de même que MN est perpendiculaire à IO, et par suite parallèle à F'E'.

Je dis de plus que les cordes F'E' et MN sont égales. En effet, supposons, pour fixer les idées, que le point I soit extérieur à la circonférence, et que l'angle EIF soit égal à l'angle EOF. Il en résultera que l'arc MN sera égal à l'arc F'E' (**).

Il résulte de là que la figure E'F'MN est un rectangle, et que E'N est parallèle à OI, la ligne F'N étant un diamètre, ce que, du reste, on aurait pu voir immédiatement. Par suite, si je prolonge le rayon OC jusqu'au point A', où il rencontre la circonférence, l'arc A'N est égal à l'arc AF'.

Deux cas peuvent alors se présenter : si les points E et F sont d'un même côté du diamètre AA', il en sera de même des points E' et F', et par suite les points E' et N seront de part et d'autre de ce diamètre. Donc la ligne

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Si le point I était intérieur, il est facile de voir que l'angle EIF serait le supplément de l'angle en O et l'on en déduirait aussi facilement que l'arc MN est égal à E'F'.

E'N rencontrera le diamètre en un point L intérieur à la circonférence, et par suite l'angle CLN, ou son égal COI, aura pour mesure la demi-somme des arcs A'N et AE'.

Si E et F sont de côtés différents du diamètre AA', les points E' et N seront d'un même côté de ce diamètre; l'angle CLN sera extérieur, et par suite aura pour mesure la demi-différence des arcs A' et AF'.

Remarque. — Le même théorème subsiste lorsque le point O est intérieur au cercle; on le démontrerait exactement de la même manière.

Note. — La même question a été résolue par MM. S. Jouhanneau et V. Jamet, élèves du lycée de Bordeaux; Pellissier; Louis Goulin, élève du lycée du Havre; Lez et Brocard.

Question 1100

(voir 2e série, t. XI, p. 180);

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

De toutes les ellipses inscrites dans un triangle donné ABC, *celle dont la surface est la plus grande est équivalente au cercle inscrit dans un triangle équilatéral équivalent au triangle proposé.*

Si, du centre de cette ellipse, on mène des droites aux centres des cercles inscrits dans les deux triangles équilatéraux construits sur l'un quelconque des trois côtés du triangle proposé, ces droites seront respectivement égales à la demi-somme et à la demi-différence des axes de l'ellipse, et les axes de l'ellipse seront dirigés suivant les bissectrices des angles formés par ces droites.

(G.)

Prenons pour axes de coordonnées AB et AC et posons

$$AB = a, \quad AC = b.$$

L'équation de la conique inscrite dans ce triangle sera

$$l^2x^2 + m^2y^2 + n^2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2$$
$$- 2lmxy - 2lnx\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) - 2mny\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0,$$

l, m et n étant des constantes indéterminées.

Posons

$$\frac{l}{n} = \lambda, \quad \frac{m}{n} = \mu,$$

$$\lambda - \frac{1}{a} = p, \quad \mu - \frac{1}{b} = q, \quad \mu + \frac{1}{b} = r;$$

l'équation devient, après avoir été développée,

$$p^2x^2 - 2\left(\frac{q}{a} + r\lambda\right)xy + q^2y^2 + 2px + 2qy + 1 = 0.$$

Or, l'équation générale d'une ellipse étant

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

son aire est représentée par l'expression

$$2\pi \sin\theta \frac{AE^2 + CD^2 - BDE - F(4AC - B^2)}{\pm(4AC - B^2)^{\frac{3}{2}}},$$

θ étant l'angle des axes. Il faut prendre le signe de manière à rendre l'aire positive.

La substitution donne, pour l'aire de l'ellipse inscrite dans le triangle proposé,

$$\frac{\pi \sin\theta \left(pq + \frac{q}{a} + \lambda r\right)^2}{\left[p^2q^2 - \left(\frac{q}{a} + \lambda r\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi \sin\theta\, ab \sqrt{ab\lambda\mu}}{2(1 - a\lambda - b\mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il suffit de chercher les conditions du maximum de

$$\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{(1 - a\lambda - b\mu)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, mieux, celles de son carré.

Comme λ et μ sont deux variables indépendantes, il faut égaler séparément à zéro les dérivées de cette expression par rapport à λ et par rapport à μ.

On est ainsi conduit à

$$a\lambda + 1 = 0, \quad b\mu + 1 = 0.$$

L'aire maximum est donc égale à $\frac{\pi ab}{6\sqrt{3}} \sin\theta$.

Soit c le côté du triangle équilatéral équivalent à ABC; son aire est égale à $\frac{c^2}{4}\sqrt{3}$, et celle du cercle inscrit à $\frac{\pi c^2}{12}$.

Or, si l'on pose

$$\frac{ab \sin\theta}{2} = \frac{c^2}{4}\sqrt{3},$$

on en déduit

$$\frac{\pi c^2}{12} = \frac{\pi ab \sin\theta}{6\sqrt{3}}.$$

On s'assure aisément que l'ellipse maximum a pour centre le point de concours des médianes et touche les côtés du triangle en leurs milieux.

Soient :

O le centre de l'ellipse;

O_1 et O_2 ceux des cercles inscrits dans les triangles équilatéraux construits sur AB, O_1 étant intérieur au triangle ABC;

I le point milieu de AB;

OH une parallèle à AB;

on trouve facilement que

$$\overline{OO_1}^2 = \frac{a^2 + b^2 - ab(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)}{9},$$

$$\overline{OO_2}^2 = \frac{a^2 + b^2 - ab(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)}{9},$$

d'où

$$\overline{OO_2}^2 - \overline{OO_1}^2 = \frac{2ab\sqrt{3}\sin\theta}{9} = \frac{2ab\sin\theta}{3\sqrt{3}};$$

mais, si a_1 et b_1 sont les demi-axes de l'ellipse, on doit avoir aussi

$$4a_1b_1 = \frac{2ab\sin\theta}{3\sqrt{3}};$$

donc

$$\overline{OO_2}^2 - \overline{OO_1}^2 = 4a_1b_1 = (a_1 + b_1)^2 - (a_1 - b_1)^2,$$

c'est-à-dire

$$OO_2 = a_1 + b_1, \quad OO_1 = a_1 + b_1.$$

Calculons maintenant la longueur du diamètre conjugué de OI, lequel est dirigé suivant OH. Nous trouverons facilement qu'il a pour valeur $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ c'est-à-dire qu'il est égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle équilatéral, ou à la moitié de la distance O_1O_2. On retrouve ainsi la construction par laquelle, connaissant deux diamètres conjugués d'une ellipse et l'angle qu'ils font entre eux, on construit les axes de cette ellipse. Les bissectrices des angles formés par les droites OO_1, OO_2 sont donc bien les directions des axes.

Note. — La même question a été résolue par MM. Pellissier; A. Tourrettes, surveillant général au lycée d'Albi, et Brocard.

Solution géométrique de la même question;

PAR M. MORET-BLANC.

On sait que l'ellipse maximum inscrite dans un triangle touche les côtés en leurs milieux; la figure formée par le triangle proposé et l'ellipse maximum inscrite peut donc être considérée comme la projection d'un cercle touchant

en leurs milieux les côtés du triangle circonscrit, qui, par conséquent, est équilatéral.

Soient C et T les aires du cercle et du triangle équilatéral circonscrit, u l'angle de leur plan avec celui du triangle ABC; les aires de l'ellipse et du triangle ABC seront respectivement $C\cos\omega$ et $T\cos\omega$; mais $C\cos\omega$ est aussi l'aire du cercle inscrit dans le triangle équilatéral d'aire $T\cos\omega$, ce qui démontre la première partie du théorème.

Le demi-diamètre de l'ellipse parallèle à l'un des côtés du triangle circonscrit est à ce côté comme les lignes parallèles dont ils sont les projections, c'est-à-dire comme le rayon d'un cercle est au côté du triangle équilatéral circonscrit : il est donc égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle équilatéral construit sur ce côté du triangle donné.

Cela posé, la construction indiquée dans l'énoncé n'est autre que celle qui sert à trouver les axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués.

Question 1110

(voir 2e série, t. XII, p. 96);

PAR M. DEMARTRES,
Professeur au collége de Valenciennes.

On construit, dans le cercle trigonométrique, l'arc $2a = AC$, $\sin 2a = CP$, *le point* P′ *symétrique de* P *par rapport à* OC, D *milieu de la corde* AC *et les droites* P′D, P′P. *Prouver que l'on a, aux signes près,*

$$P'D = \sin 3a, \quad PP' = \sin 4a.$$

Si l'on construit $\cos 2a = CR$, R′ *symétrique de* R *par rapport à* OC, *on aura, aux signes près,*

$$R'D = \cos 3a, \quad P'R = \cos 4a.$$

Décrivons un cercle sur OC comme diamètre (*), nous obtiendrons immédiatement les points P, D, R, et nous en déduirons sans peine P′R′; on voit immédiatement :

1° Que PP′ sous-tend, dans le cercle de rayon un demi, l'arc PCP′ $=4$ arc CD; or, si les arcs CD, CA se correspondent dans les deux cercles, on en conclut que PP′ est la moitié de la corde qui sous-tendrait 4 arcs CA ou $8a$ dans le cercle primitif; c'est donc le sinus de $4a$; donc

$$PP' = \sin 4a;$$

2° Que DP′ sous-tend un arc $= 3$ CD; donc, d'après le même raisonnement,

$$P'D = \sin 3a;$$

3° Que P′R est parallèle à OC, à cause de l'égalité

$$CR = PO' = PO = \cos 2a;$$

on en conclut que RR′PP′ est un rectangle dont les diagonales sont des diamètres du petit cercle; donc :

4° Le triangle RP′P est rectangle, et a pour hypoténuse 1; donc si $PP' = \sin 4a$, on en conclut

$$RP' = \cos 4a;$$

5° Le triangle P′DR est aussi rectangle, et son hypoténuse est 1; comme $P'D = \cos 3a$, on en déduit

$$P'R = \cos 3a.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Édouard Laurens, à Rouen; Louis Cauret, au Mans; Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne; Auguste Morel, professeur à Sainte-Barbe; V. Liguine, professeur à l'Université d'Odessa; M. Ellie, professeur au collége de Blois; E. Kruschwitz, à Berlin; P. Vannetelle, élève du lycée de Reims; Pierre Arnould, élève du collége Stanislas; Charles Zagner, assistant à l'École Polytechnique de Vienne.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

TABLE DES MATIÈRES.

Mars 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

mary 1

(Deuxième Série.) — Avril 1873.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM, ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

AVRIL 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103, ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.

(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1873

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE

RÉDIGÉ PAR

M. GERONO,

Professeur de Mathématiques,

ET

M. CH. BRISSE,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem,
et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1873 est en cours de publication.

On ne peut s'abonner que pour l'année entière.

L'abonnement est augmenté de 3 francs à partir de l'année 1869, et les prix pour les divers pays se trouvent dorénavant fixés ainsi qu'il suit :

Paris..	15 fr.
Départements et Algérie..................................	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Égypte, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Portugal, Suisse, Turquie..............................	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce..............	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége, Suède..............................	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861), au lieu de 240 francs, 200 francs payables de la manière suivante : 100 francs comptant, et les 100 francs restants en un bon à trois mois à l'ordre de M. Gauthier-Villars, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes.

Les tomes X et XVI à XX (1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.

Les autres tomes de la première série se vendent séparément...... 12 fr.

La DEUXIÈME SÉRIE, commencée en 1862, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les tomes I à V (1862 à 1866) ne se vendent pas séparément.

Les tomes suivants de la deuxième série se vendent séparément... 15 fr.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 97);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

19. Toutes les fois que nous parviendrons à une équipollence binôme, nous pourrons la supposer réduite (16) à la forme $m\mathrm{IL} \triangleq n\mathrm{MN}$, et nous en déduirons les deux conséquences

$$\text{inc.IL} = \text{inc.MN} \quad \text{et} \quad m\,\text{gr.IL} = n\,\text{gr.MN}.$$

Si, d'après les données de la question, il est impossible que inc.IL = inc.MN, il en résulte que les deux coefficients m, n sont nuls l'un et l'autre. Donc :

RÈGLE II. — *Si les deux termes d'une équipollence binôme ont des inclinaisons différentes, chacun d'eux est nul.*

20. Toutes les fois que nous parviendrons à une équipollence trinôme, nous pourrons en considérer les termes comme respectivement équipollents à ceux de l'équipollence trinôme identique (10)

$$\mathrm{LM} + \mathrm{MN} + \mathrm{NL} \triangleq 0.$$

S'il arrive que l'on ait inc.LM = inc.MN, les deux droites LM, MN seront en prolongement l'une de l'autre, et LN en sera la vraie somme. Cela montre évidemment que :

RÈGLE III. — *Si deux termes d'une équipollence trinôme ont des inclinaisons égales, l'autre terme (en*

supposant tous les termes transportés dans un même membre) aura une inclinaison qui différera de 180 degrés de celle des précédents, et sa longueur sera égale à la somme des longueurs des deux premiers termes.

21. Pour terminer l'exposition de la méthode des équipollences, j'aurais à expliquer la signification et l'usage de deux autres signes; mais je crois opportun de donner auparavant quelques applications des principes exposés. Donnons d'abord un coup d'œil sur les théorèmes de Géométrie implicitement compris dans ces principes. Une des bases de la méthode des équipollences est l'égalité des angles à côtés parallèles. Il n'est donc pas étonnant qu'on puisse déduire de la méthode les théorèmes de la théorie des parallèles.

L'autre vérité fondamentale de la méthode des équipollences consiste dans la proportionnalité des figures semblables; par suite, on pourra tirer, des règles de cette méthode, les théorèmes sur la similitude ou l'égalité des triangles. Mais je ne m'arrête pas à cette sorte de cercle vicieux, d'après lequel on déduirait de la méthode les vérités mêmes qui ont servi à l'établir.

22. Notons néanmoins un exemple facile. Si un quadrilatère ABCD a les deux côtés opposés AB, DC égaux et parallèles, cela s'exprime par l'équipollence $AB \triangleq DC$; et, en ajoutant BD aux deux membres, on a, par la règle I, $AD \triangleq BC$, c'est-à-dire que les deux autres côtés sont aussi égaux et parallèles.

La condition pour que ABCD soit un parallélogramme, c'est-à-dire ait ses côtés opposés parallèles, est exprimée par les deux équipollences (4)

$$AB \triangleq m\,DC, \quad AD \triangleq n\,BC,$$

où les coefficients indéterminés m, n sont placés pour indiquer que les côtés opposés sont parallèles, mais que nous ne savons rien sur leurs longueurs. Au moyen de la règle I, nous réduirons tous les termes à contenir seulement AB, AC, AD :

$$\mathrm{AB} \bumpeq m\,\mathrm{AC} - m\,\mathrm{AD}, \quad \mathrm{AD} \bumpeq n\,\mathrm{AC} - n\,\mathrm{AB},$$

et, en éliminant AD,

$$\mathrm{AB} \bumpeq (m - mn)\,\mathrm{AC} + mn\,\mathrm{AB}.$$

Comme AB, AC ne sont pas parallèles, on aura, d'après la règle II,

$$1 - mn = 0, \quad m - mn = 0,$$

c'est-à-dire

$$m = 1, \quad n = 1;$$

d'où il résulte que les côtés opposés d'un parallélogramme sont non-seulement parallèles, mais aussi égaux.

23. Dans les principes développés jusqu'à présent ne figure pas l'égalité de deux triangles égaux dans toutes leurs parties, mais *symétriques* l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire tels, que l'un ne puisse se superposer à l'autre sans sortir de son propre plan, mais que cette superposition puisse se faire si on le *retourne*, en sorte que la face de son plan, qui était d'abord en dessous, vienne en dessus. De l'égalité de deux triangles *symétriques* dérive la propriété connue du triangle isoscèle; pour n'avoir pas néanmoins à recourir à ce théorème de Géométrie, il convient de l'introduire dans notre méthode par la règle suivante :

Règle IV. — *Si, en comparant les termes d'une équipollence trinôme aux termes de l'équipollence identique*

$LM + MN + NL \bumpeq 0$, *on reconnaît que*

$$\text{inc.}\,LM + \text{inc.}\,NL = 2\,\text{inc.}\,MN$$

(*les trois inclinaisons étant inégales*), *on aura*

$$\text{gr.}\,LM = \text{gr.}\,NL.$$

Réciproquement, si $\text{gr.}\,LM = \text{gr.}\,NL$, *on aura*

$$\text{inc.}\,LM + \text{inc.}\,NL = 2\,\text{inc.}\,MN.$$

En effet, l'égalité des angles M, N d'un triangle LMN s'exprime, en prenant les deux angles avec le même signe (14), par $NML = LNM$, ou (15) par

$$\text{inc.}\,LM - \text{inc.}\,NM = \text{inc.}\,NM - \text{inc.}\,NL.$$

Applications.

24. Toute formule d'Algèbre identique exprime un théorème sur des quantités, lequel peut aussi être considéré comme un théorème relatif à plusieurs points situés en ligne droite. Telles sont les onze premières propositions du second livre d'Euclide. Je ne crois pas que, avant moi, on eût pensé à étendre tous ces théorèmes aux points d'un plan. Cela résulte du théorème ci-après, qui est une conséquence immédiate des principes de la méthode des équipollences ; il présente un premier et remarquable exemple de l'usage de cette méthode pour arriver directement, et sans constructions géométriques, à un grand nombre de théorèmes qu'il ne serait pas facile d'établir autrement. Il est vrai que de tels théorèmes, dans toute leur généralité, sont trop compliqués pour mériter d'attirer l'attention, et, en les limitant à des cas simples et particuliers, on tombe sur des théorèmes déjà connus ; car il est fort improbable qu'une vérité simple et élémentaire ait échappé aux recherches de tant de géomètres.

Théorème général. — *Toute propriété des points d'une droite donne un théorème relatif aux points d'un plan, par le seul changement des équations en équipollences.*

25. Prenons pour exemple la formule algébrique

$$b(b+2c)+c^2=(b+c)^2,$$

qui conduit à la sixième proposition du second livre d'Euclide : si une droite BD est divisée en C également, c'est-à-dire si BC = CD, et que A soit un point quelconque dans son prolongement, on aura

$$\mathrm{AB.AD}+(\mathrm{BC})^2=(\mathrm{AC})^2.$$

Pour vérifier cette équation et s'assurer en même temps que les droites sont indiquées (2) dans le sens convenable (ce à quoi l'on ne prenait pas garde autrefois, mais ce qu'il est indispensable d'observer dans la méthode des équipollences), faisons les substitutions indiquées au nº 11, et observons si l'équation

$$(\mathrm{AZ}-\mathrm{BZ})(\mathrm{AZ}-\mathrm{DZ})+(\mathrm{BZ}-\mathrm{CZ})^2=(\mathrm{AZ}-\mathrm{CZ})^2$$

devient identique dans l'hypothèse BC = CD, c'est-à-dire BZ — CZ = CZ — DZ.

Après avoir fait cette vérification, nous avons le théorème suivant :

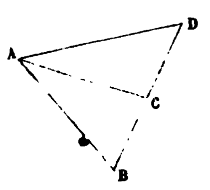
Si un côté BD *du triangle* ABD (*fig.* 5) *est divisé par le milieu en* C, *l'équipollence suivante aura toujours lieu*

$$\mathrm{AB.AD}+(\mathrm{BC})^2+\mathrm{AC.CA} \triangleq 0,$$

c'est-à-dire qu'on peut construire un triangle dont les côtés soient respectivement proportionnels aux produits AB.AD, $(\mathrm{BC})^2$, AC.CA, *et dont les inclinaisons*

soient respectivement $\text{inc.}AB + \text{inc.}AD$, $2\,\text{inc.}BC$, $\text{inc.}AC + \text{inc.}CA = 2\,\text{inc.}AC \pm 180^\circ$.

Fig. 5.



Ce théorème peut se démontrer aussi au moyen d'un autre calcul plus rapide : par hypothèse,

$$CD \triangleq BC \triangleq -CB,$$

et l'on a, par la règle I et le principe fondamental (10, 18),

$$AB.AD \triangleq (AC + CB)(AC - CB) \triangleq (AC)^2 - (CB)^2$$

ou

$$AB.AD + (CB)^2 - (AC)^2 \triangleq 0.$$

Ce théorème, sous sa forme générale, présente peu d'utilité. Voyons-en quelques conséquences.

26. *Corollaire I.* — Si $2\,\text{inc.}CB = 2\,\text{inc.}AC \pm 180^\circ$, les deux premiers termes de l'équipollence trinôme

$$(CB)^2 + AC.CA + AB.AD \triangleq 0$$

auront la même inclinaison ; d'où, par la règle III,

$$\text{gr.}(AB.AD) = \text{gr.}(AC.CA) + \text{gr.}(CB)^2,$$

et, en outre,

$$\text{inc.}BA + \text{inc.}AD = 2\,\text{inc.}CB = 2\,\text{inc.}DB.$$

Cette dernière relation, appliquée à l'équipollence

$$BA + DB + AD \triangleq 0,$$

donne, d'après la règle IV,

$$\text{gr.}AB = \text{gr.}AD.$$

La condition $\text{inc.}CB - \text{inc.}AC = \pm 90^\circ$ signifie que l'angle ACB est droit, et les deux équations relatives aux grandeurs donnent le théorème de Pythagore

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2.$$

27. *Corollaire II.* — Si $\text{gr.}CB = \text{gr.}AC$, la règle IV, appliquée à l'équipollence identique $AC + BA + CB \triangleq 0$, donne

$$\text{inc.}AC + \text{inc.}CB = 2\,\text{inc.}BA = 2\,\text{inc.}AB,$$

et, en l'appliquant à notre équipollence trinôme

$$(CB)^2 + AB.AD + AC.CA \triangleq 0,$$

on a

$$2\,\text{inc.}CB + \text{inc.}AC + \text{inc.}CA = 2(\text{inc.}AB + \text{inc.}AD).$$

Prenant la moitié de cette équation et retranchant la précédente, on a

$$\tfrac{1}{2}\,\text{inc.}CA - \tfrac{1}{2}\,\text{inc.}AC = \text{inc.}AD - \text{inc.}AB.$$

Le premier membre [15, (1)] est égal à 90 degrés. Par suite :

Si $\text{gr.}CA = \text{gr.}CB = \text{gr.}CD$, *l'angle* BAD, *inscrit dans la demi-circonférence, est droit.*

28. On peut trouver que je m'arrête à des choses bien faciles et bien connues; mais, pour se servir d'une méthode, il est nécessaire de se la rendre familière. Je prie donc le lecteur de vouloir bien me suivre dans un petit nombre d'autres théorèmes, et de remarquer tous les passages avec la plus grande patience, au point de pouvoir

ensuite refaire par lui-même le chemin parcouru. De cette manière, il se verra en possession de la méthode, et, après cela, tout lui semblera facile. J'espère que l'on considérera comme intéressant de voir comment nous trouvons des théorèmes particuliers, en partant de celui du n° 24, au moyen d'un très-petit nombre de considérations géométriques, lesquelles, en outre, se présentent presque uniquement comme la traduction en langage ordinaire des conditions relatives aux angles, d'ailleurs parfaitement exprimées par les relations entre les inclinaisons.

29. La formule $bd + (b + d + i)i = (b + i)(i + d)$ nous apprend que, pour quatre points en ligne droite, on a

$$AB.ID + AD.BI \triangleq AI.BD;$$

ce qui peut se vérifier comme nous l'avons dit aux n°s 11 et 25. Par suite (24) :

Fig. 6.

Théorème. — *Pour tout quadrilatère* ABID (*fig.* 6) *a lieu l'équipollence*

$$AB.ID + AD.BI + AI.DB \triangleq 0,$$

c'est-à-dire qu'on peut construire un triangle dont les côtés, respectivement proportionnels aux grandeurs de

ces produits, aient des inclinaisons égales aux inclinaisons de ces mêmes produits.

Nous avons déjà dit (16) que

$$\text{inc.}(AB.ID) = \text{inc.}AB + \text{inc.}ID, \text{ etc.}$$

30. Cette fois encore, nous obtiendrons des cas particuliers, en supposant que le triangle mentionné au théorème précédent devienne une ligne droite, ou un triangle rectangle, isoscèle ou équilatéral.

Corollaire I. — Si $\text{inc.}(AB.ID) = \text{inc.}(AD.BI)$, la règle III donne

$$\text{gr.}(AB.ID) + \text{gr.}(AD.BI) = \text{gr.}(AI.DB).$$

Or (15)

$$\text{inc.}AD - \text{inc.}AB = \text{angle}BAD,$$
$$\text{inc.}IB - \text{inc.}ID = \text{angle}DIB;$$

par suite (15, 16), la condition précédente est identique à celle-ci :

$$\text{angle}BAD + \text{angle}DIB = 180°,$$

et nous avons le théorème de Ptolémée : *Dans tout quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires, le produit des diagonales est égal à la somme des deux produits des côtés opposés.*

31. *Corollaire II.* — Si, au lieu de cela, on a

$$\text{inc.}(AB.ID) - \text{inc.}(AD.BI) = \pm 90°,$$

ou

$$\text{angle}BAD + \text{angle}DIB = \pm 90° \pm 180°,$$

le triangle exprimé par l'équipollence trinôme (29) est rectangle; par suite, le théorème de Pythagore (26) nous donne cet énoncé :

Si la somme des deux angles opposés d'un quadrilatère est égale à un ou à trois droits, le carré du produit des deux diagonales est égal à la somme des carrés des produits des côtés opposés.

32. *Corollaire III.* — Le triangle représenté par l'équipollence (29) est isoscèle lorsque

$$\text{gr.}(AB.ID) = \text{gr.}(AD.BI);$$

alors la règle IV (23) donne la condition

$$\text{inc.}(AB.ID) + \text{inc.}(AD.BI) = 2\,\text{inc.}(AI.DB),$$

laquelle se réduit, de diverses manières, à une relation d'angles (15). En la développant sous la forme

$$\text{inc.}AI - \text{inc.}AB + \text{inc.}BD - \text{inc.}BI + \text{inc.}IA$$
$$- \text{inc.}ID + \text{inc.}DB - \text{inc.}DA = 180^\circ,$$

on a ce théorème :

Si le produit de deux côtés opposés AB, ID *est égal au produit des deux autres* BI, DA, *la somme des angles* BAI, IBD, DIA, ADB, *successivement compris entre les diagonales et les côtés, est égale à deux droits.*

33. *Corollaire IV.* — Le triangle de l'équipollence trinôme (29) sera équilatéral s'il a deux angles égaux à 60 degrés, c'est-à-dire si deux des équations suivantes ont lieu :

$$\text{inc.}AD - \text{inc.}AB + \text{inc.}IB - \text{inc.}ID = \pm 60^\circ,$$
$$\text{inc.}AI - \text{inc.}AB + \text{inc.}DB - \text{inc.}DI = \mp 60^\circ,$$
$$\text{inc.}AD - \text{inc.}AI + \text{inc.}BI - \text{inc.}BD = \mp 60^\circ.$$

Ici encore, si l'on veut les réduire à des relations entre les angles, il faudra faire attention aux signes, soin qui

ne serait pas nécessaire si l'on s'en tenait aux précédentes relations.

En supposant le quadrilatère de forme ordinaire, à angles saillants, nous avons ce théorème : *Si deux angles opposés d'un quadrilatère* ABID *ont une somme de* 60 *degrés, qui soit en même temps la différence d'un des quatre couples d'angles* BAI, BDI, DBA, DIA, IAD, IBD, ADB, AIB, *le produit des diagonales est égal à chacun des produits des côtés opposés.*

34. *Corollaire V.* — Si, aux conditions du corollaire précédent, on ajoute que les trois points B, I, D sont en ligne droite, de sorte que gr.BI + gr.ID = gr.BD, la deuxième et la troisième relation du n° 33 deviendront

$$\text{inc.AI} - \text{inc.AB} = \mp 60^\circ,$$
$$\text{inc.AD} - \text{inc.AI} = \mp 60^\circ.$$

Par suite : *Si les trois droites* AB, AI, AD, *formant entre elles des angles de* 60 *degrés, sont coupées par une droite quelconque* BID, *on aura*

$$\text{gr.}(\text{AB.ID}) = \text{gr.}(\text{AD.BI}) = \text{gr.}(\text{AI.DB}).$$

Et, de même que $\frac{1}{2}$BD est moyenne arithmétique entre ID et BI, de même 2AI est la longueur qu'on appelle *moyenne harmonique* entre les deux droites AB, AD.

35. Comme dernier exemple du n° 24, nous allons donner un théorème qui comprend celui du n° 25. Entre quatre points d'une droite, et aussi d'un plan, on a

$$\text{AB.AD} + \text{BC.CD} \triangleq \text{AC}(\text{AB} + \text{CD});$$

ce qu'il est facile de vérifier d'après la manière habituelle (11).

Menant la droite BL $\bumpeq$ CD (*fig.* 6), on a, d'après la règle I,

$$AB + CD \bumpeq AB + BL \bumpeq AL.$$

Par conséquent,

Théorème. — *Si* BL *est équipollent à* CD, *l'équipollence suivante a lieu*

$$AB.AD + BC.CD + AC.LA \bumpeq 0.$$

36. *Corollaire.* — Si inc.(BC.CD) = inc.(AC.LA), la règle III nous donne

$$\text{gr.}(AB.AD) = \text{gr.}(BC.CD) + \text{gr.}(AC.LA),$$

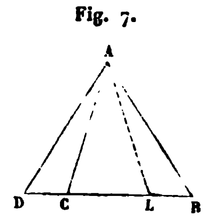
et, en outre,

$$\text{inc.}(AB.AD) = 180^\circ + \text{inc.}(BC.CD)$$

ou

$$\text{inc.}BA + \text{inc.}AD = \text{inc.}BC + \text{inc.}CD.$$

Fig. 7.



Si nous nous limitons au cas particulier (*fig.* 7) où BCD est une ligne droite, et si, par suite,

$$\text{inc.}BC = \text{inc.}CD = \text{inc.}BD,$$

la relation précédente

$$\text{inc.}BA + \text{inc.}AD = 2\,\text{inc.}BD$$

donnera, d'après la règle IV,

$$\text{gr.}AB = \text{gr.}AD.$$

Semblablement, l'égalité

$$\text{inc.}\,AC + \text{inc.}\,LA = \text{inc.}\,BC + \text{inc.}\,CD = 2\,\text{inc.}\,CL$$

donnera

$$\text{gr.}\,AC = \text{gr.}\,AL.$$

Donc : *Si le point* L *de la base du triangle* ACB *est à une distance du sommet égale à* AC, *on aura*

$$(AB)^2 = (BC.BL) + (AC)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - (BC.CL).$$

37. Nous avons voulu tirer toutes ces conséquences des seuls principes de la méthode des équipollences. Du reste, il eût été facile de remarquer que l'hypothèse (36)

$$2\,\text{inc.}\,BC = \text{inc.}\,BA + \text{inc.}\,AD = \text{inc.}\,AC + \text{inc.}\,LA$$

entraîne cette conséquence, que les deux triangles ABD, ACL sont isoscèles. On le voit promptement en supposant qu'on ait inc. BC = o, c'est-à-dire que la droite BC soit prise (13) pour origine des inclinaisons ; en sorte que les droites BA, AD (et pareillement AC, LA) aient des inclinaisons égales, mais de signes contraires.

38. Revenant au théorème général (*fig.* 6), construisons (16) $AI \triangleq AB.AD : AL$. L'équipollence du n° 35, divisée par AL, prendra la forme

$$AI + BC.CD : AL - AC \triangleq o,$$

ou, d'après la règle I,

$$CI \triangleq CB.CD : AL \triangleq CB.BL : AL.$$

Les précédentes équipollences

$$AI : AB \triangleq AD : AL,$$

$$CI : LB \triangleq CB : LA$$

expriment que le triangle IAD est directement semblable au triangle BAL, lequel est lui-même directement semblable à IBC.

Dans la méthode des équipollences, il est nécessaire de distinguer les figures directement semblables des figures symétriquement semblables. Les premières sont celles qui, sans renversement (23) et seulement par un mouvement dans le plan qui les contient, peuvent être rendues homothétiques, c'est-à-dire telles, que leurs côtés homologues soient parallèles. Pour indiquer des figures semblables, nous aurons toujours l'attention de prendre les lettres dans le même ordre; si bien que, en disant que IAD est semblable à BAL, nous entendons que le sommet I est homologue de B, A homologue de A, et D homologue de L.

Les mêmes équipollences

$$\text{AI} : \text{AD} \doteq \text{AB} : \text{AL},$$

$$\text{CI} : \text{LD} \doteq \text{CD} : \text{LA}$$

nous montrent que les trois autres triangles IAB, DAL, IDC sont en même temps directement semblables.

La dépendance entre ces similitudes pourrait aussi être démontrée par les considérations ordinaires de la Géométrie élémentaire; la méthode des équipollences indique, du reste, le chemin à suivre pour démontrer, au moyen de la Géométrie synthétique, les théorèmes trouvés par le secours de cette méthode.

En supposant que BCD soit une ligne droite, ou un triangle rectangle, isoscèle ou équilatéral, on pourra, par exemple, démontrer de la sorte les corollaires des nos 30, 31, 32, 33.

39. *A tout quadrilatère* ABCD *non parallélogramme correspond un point remarquable* I, *qui est le sommet*

commun des triangles directement semblables ADI, BCI, *ou* ABI, DCI, *ayant pour bases deux côtés opposés du quadrilatère.*

Nous pouvons imaginer que AD, BC soient deux droites correspondantes de deux figures directement semblables, et I sera l'unique point de ces deux figures se correspondant à lui-même. Nous sommes donc conduits au problème suivant :

40. Problème. — *Trouver le sommet commun de deux triangles directement semblables de bases données.*

La similitude des triangles ADI, BCI (*fig.* 6) est complétement exprimée (16) par l'équipollence

$$\mathrm{AD} : \mathrm{BC} \bumpeq \mathrm{AI} : \mathrm{BI},$$

laquelle nous servira à déterminer le point inconnu I. Celui-ci entre dans deux droites ; mais nous le réduirons à n'entrer que dans une seule, en remarquant que l'on a, d'après la règle I,

$$\mathrm{BI} \bumpeq \mathrm{AI} - \mathrm{AB}.$$

D'après cela, l'équipollence se résoudra (18) par rapport à l'inconnue AI, et donnera

$$\mathrm{BC}.\mathrm{AI} \bumpeq \mathrm{AD}.\mathrm{AI} - \mathrm{AD}.\mathrm{AB},$$

$$\mathrm{AI} \bumpeq \mathrm{AD}.\mathrm{AB} : (\mathrm{AD} - \mathrm{BC}).$$

Pour construire la droite AD — BC, on trace (5) DL $\bumpeq$ CB, si bien que

$$\mathrm{AD} - \mathrm{BC} \bumpeq \mathrm{AD} + \mathrm{DL} \bumpeq \mathrm{AL}.$$

Alors l'équipollence

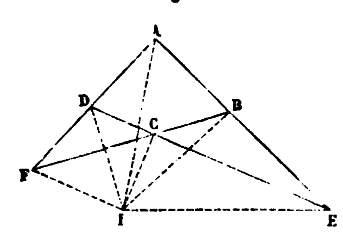
$$\mathrm{AI} \bumpeq \mathrm{AD}.\mathrm{AB} : \mathrm{AL}$$

donnera (16) la grandeur et l'inclinaison de AI. Il est

évident que tout se réduit à construire le triangle ABI directement semblable à ALD.

41. Pour s'habituer à l'algorithme de la méthode et reconnaître les ressources que présentent ses principes, peu nombreux d'ailleurs, il est nécessaire de varier la nature des questions. Cherchons suivant quelles relations une droite quelconque DCE (*fig.* 8) coupe les côtés

Fig. 8.



d'un triangle ABF. La condition que le point E se trouve sur la droite AB est exprimée (4) par

$$\mathrm{AE} \bumpeq z\,\mathrm{AB},$$

z étant un coefficient numérique.

Nous avons également

$$\mathrm{BC} \bumpeq x\,\mathrm{BF},$$

$$\mathrm{AD} \bumpeq y\,\mathrm{AF}.$$

Enfin, pour exprimer la condition que DCE soit une ligne droite, c'est-à-dire que DC ait la même inclinaison que DE, nous poserons

$$m\,\mathrm{DE} \bumpeq \mathrm{DC}.$$

Au moyen des équipollences précédentes, et par l'application de la règle I, nous éliminons les points D, C, E,

et nous obtenons l'équipollence

$$m(z\,\mathrm{AB} - y\,\mathrm{AF}) \doteq \mathrm{AC} - \mathrm{AD} \doteq \mathrm{AB} + x\,\mathrm{BF} - y\,\mathrm{AF}.$$

Pour appliquer la règle II, nous réduirons tous les termes à ne contenir que les deux droites non parallèles AB, AF, et nous aurons

$$m(z\,\mathrm{AB} - y\,\mathrm{AF}) \doteq (x - y)\,\mathrm{AF} + (1 - x)\,\mathrm{AB}.$$

De là (19)

$$mz = 1 - x, \quad my = y - x.$$

Enfin, par l'élimination de m, nous obtenons la relation cherchée

$$yz - xz - y + xy = 0,$$

qui aurait pris une forme plus symétrique par un meilleur choix des premières données.

Elle peut s'écrire

$$zx(y - 1) = (z - 1)(x - 1)y,$$

et nous donne l'*involution* connue

$$\mathrm{AE}.\mathrm{BC}.\mathrm{FD} \doteq \mathrm{BE}.\mathrm{FC}.\mathrm{AD},$$

dans laquelle figure le signe $\doteq$ au lieu du signe $=$, parce qu'elle subsiste non-seulement quant aux grandeurs, mais aussi quant aux inclinaisons.

(*A suivre.*)

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL PESANT ET LIBRE DANS UN FLUIDE HOMOGÈNE EN REPOS;

PAR M. TH. DIEU.

L'hypothèse d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse du mobile, généralement admise dans les



éléments de Mécanique rationnelle, n'est pas satisfaisante, car elle ne conduit pas à des résultats qui puissent être mis, au moins approximativement, d'accord avec l'observation, pour quelques mouvements. Quelle que soit la fonction de la vitesse qu'on prenne pour représenter la résistance, il faudrait sans doute tenir compte de la communication du mouvement au fluide, comme l'a fait Poisson dans un Mémoire sur le pendule simple dans l'air. Mais, sans aller si loin et sans sortir des éléments, on peut essayer d'exprimer la résistance par la fonction binôme $Av+Bv^2$ de la vitesse acquise v, adoptée par quelques balisticiens, à qui elle a donné des résultats plausibles.

I.

Mouvement d'un point matériel pesant et libre, sans vitesse initiale, dans un fluide homogène en repos, dont la résistance pour l'unité de masse est représentée par la fonction $Av+Bv^2$ de la vitesse v acquise à la fin du temps t.

Si l'on désigne par α et $-\beta$ les racines de l'équation $Bv^2+Av-g=0$, lesquelles sont de signes contraires, car on doit admettre que B est positif, l'équation du mouvement est

$$\frac{dv}{dt}=B(p+v)(\alpha-v).$$

En posant $(\alpha+\beta)B=\gamma$, on tire de cette équation

$$\gamma\,dt=\frac{dv}{\beta+v}+\frac{dv}{\alpha-v},$$

d'où l'intégrale particulière

$$\gamma t=l\,\frac{\alpha(\beta+v)}{\beta(\alpha-v)},$$

la constante étant déterminée de manière que v soit nul pour $t = 0$. Résolvant par rapport à v, on a

(1) $$v = \alpha\left(1 - \frac{\alpha + \beta}{\beta e^{\gamma t} + \alpha}\right).$$

Il résulte évidemment de cette formule que la vitesse, qui augmente avec t, reste toujours inférieure à la fonction α des coefficients spécifiques A et B de la résistance.

Par la substitution de $\frac{dx}{dt}$ à v, on a

$$dx = \alpha dt + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}\,\frac{d(\alpha e^{-\gamma t})}{\beta + \alpha e^{-\gamma t}},$$

d'où

(2) $$x = \alpha t + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}\, l\,\frac{\beta + \alpha e^{-\gamma t}}{\alpha + \beta},$$

en disposant de la constante de manière que x soit nul pour $t = 0$.

De $\alpha\beta = \frac{g}{B}$ et $\alpha + \beta = \frac{\gamma}{B}$, on déduit

$$\alpha = \frac{\beta(\alpha\gamma - g)}{g} \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = \frac{\alpha\beta\gamma}{g} = \frac{\alpha^2\gamma}{\alpha\gamma - g};$$

les formules (1) et (2) se ramènent, d'après cela, à

(3) $$v = \alpha\left(1 - \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - g + g e^{\gamma t}}\right),$$

(4) $$x = \alpha\left[t + \frac{\alpha}{\alpha\gamma - g}\, l\,\frac{g + (\alpha\gamma - g)e^{-\gamma t}}{\alpha\gamma}\right],$$

où il n'entre que deux paramètres, α, γ, relatifs à la résistance.

Il suffit d'avoir les vitesses a, a', acquises à la fin de deux chutes de durées θ, θ', pour arriver aux valeurs de α, γ, qui conviennent au milieu dans lequel le mouve-

ment s'effectue, si toutefois l'hypothèse sur la résistance est admissible (*). En remplaçant v et t par leurs valeurs dans la formule (3), il vient

$$g(\alpha - a)(e^{\theta\gamma} - 1) - a\alpha\gamma = 0, \quad g(\alpha - a')(e^{\theta'\gamma} - 1) - a'\alpha\gamma = 0,$$

et l'élimination de α donne l'équation

$$g(a' - a)(e^{\theta\gamma} - 1)(e^{\theta'\gamma} - 1) - aa'\gamma\{e^{\theta'\gamma} - e^{\theta\gamma}\} = 0.$$

Si l'on pose $e^{\theta\gamma} = \xi$, d'où $\theta\gamma = l\xi$ et $e^{\theta'\gamma} = \xi^{\frac{\theta'}{\theta}}$, cette équation se ramène à

$$g(a' - a)(\xi - 1)\left(\xi^{\frac{\theta'}{\theta}} - 1\right) - \frac{aa'}{\theta}\left(\xi^{\frac{\theta'}{\theta}} - \xi\right) l\xi = 0,$$

d'où il faudra tirer la valeur de ξ par des approximations successives. Celles de γ, α, β, B et A s'obtiendront ensuite facilement.

Pour avoir une première valeur approchée de ξ, on peut employer les deux courbes

$$\eta = l\xi, \quad \eta = g\theta\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)\frac{(\xi - 1)\left(\xi^{\frac{\theta'}{\theta}} - 1\right)}{\xi^{\frac{\theta'}{\theta}} - \xi},$$

qui se coupent au point $\xi = 1$, $\eta = 0$, qu'on doit rejeter, et qui ont toutes deux l'axe des η pour asymptote. Si l'on avait $\theta' = 2\theta$, la seconde courbe deviendrait une hyperbole ayant son centre à l'origine.

La substitution de leurs valeurs à α, γ et celle de θ, puis de θ' à t, dans la formule (4), devront conduire aux hauteurs de chute qui auront été mesurées. S'il n'en était pas ainsi, la résistance ne pourrait pas être représentée par la formule $Av + Bv^2$.

(*) Les vitesses a, a' peuvent être évaluées au moyen d'un pendule balistique convenablement modifié.

II.

Mouvement d'un point matériel pesant et libre dans un fluide homogène en repos, dont la résistance est la même que dans le problème précédent, la vitesse initiale étant verticale et dirigée de bas en haut.

L'équation du mouvement est

$$\frac{dv}{dt} = -\left[g - \frac{A^2}{4B} + B\left(v + \frac{A}{2B}\right)^2\right].$$

Il y a trois cas à examiner :

1° Soit $g - \frac{A^2}{4B} > 0$. B étant toujours positif, on posera $g - \frac{A^2}{4B} = B\varepsilon^2$. Si l'on remplace, en outre, $v + \frac{A}{2B}$ par v', l'équation devient

$$B\,dt = -\frac{dv'}{\varepsilon^2 + v'^2}.$$

L'intégration, faite de manière que $v' = v'_0$ pour $t = 0$, v'_0 désignant la valeur de v' correspondant, d'après $v' = v + \frac{A}{2B}$, à la valeur initiale v_0 de v, donne

$$B\varepsilon t = \operatorname{arctang}\frac{v'_0}{\varepsilon} - \operatorname{arctang}\frac{v'}{\varepsilon} = \operatorname{arctang}\frac{\varepsilon(v'_0 - v')}{\varepsilon^2 + v'_0 v'},$$

d'où

$$(1) \qquad v = \varepsilon\,\frac{v'_0 - \varepsilon \operatorname{tang} B\varepsilon t}{v'_0 \operatorname{tang} B\varepsilon t + \varepsilon} - \frac{A}{2B}.$$

Remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$, on a

$$dx = \varepsilon\,\frac{v'_0 \cos B\varepsilon t - \varepsilon \sin B\varepsilon t}{v'_0 \sin B\varepsilon t + \varepsilon \cos B\varepsilon t}\,dt - \frac{A\,dt}{2B},$$

d'où

$$(2)\qquad x = \frac{1}{B}\, l\left(\frac{v'_0}{\varepsilon}\sin B\varepsilon t + \cos B\varepsilon t\right) - \frac{At}{2B},$$

en disposant de la constante de manière que x soit nul pour $t = 0$.

D'après la formule (1), la vitesse devient nulle et le mouvement ascendant cesse pour la valeur de t, qui satisfait à l'équation

$$2B\varepsilon(v'_0 - \varepsilon\,\mathrm{tang}\,B\varepsilon t) - A(v'_0\,\mathrm{tang}\,B\varepsilon t + \varepsilon) = 0.$$

On en tire

$$\mathrm{tang}\,B\varepsilon t = \varepsilon\,\frac{2Bv'_0 - A}{2B\varepsilon^2 + Av'_0} = \frac{2B\varepsilon v_0}{2g + Av_0},$$

puis

$$t = \frac{1}{B\varepsilon}\,\mathrm{arctang}\,\frac{2B\varepsilon v_0}{2g + Av_0}.$$

La formule (2) donne, pour cette valeur de t,

$$x = \frac{1}{2B}\, l\,\frac{g + Av_0 + Bv_0^2}{g} - \frac{A}{2B^2\varepsilon}\,\mathrm{arctang}\,\frac{2B\varepsilon v_0}{2g + Av_0},$$

ce qui détermine la position extrême du mobile. Dès qu'il y sera parvenu, le mouvement changera de sens et sera celui qui fait l'objet du premier problème.

Si l'on remplace, dans la formule (4), problème I, x par la valeur que donne la formule ci-dessus, on a l'équation qui détermine la durée du retour du mobile à la position d'où il a été lancé, et, en remplaçant t par la valeur de cette durée dans la formule (3), même problème, on obtient la vitesse correspondante.

L'expression ci-dessus de x devient indéterminée pour $A = 0$, $B = 0$; mais, si on la développe d'abord suivant les puissances de A et de B, elle donne $x = \frac{v_0^2}{2g}$.

2° Soit $g - \frac{A^2}{4B} = 0$. En posant $A = \frac{2g}{a}$, on a

$$B = \frac{A^2}{4g} = \frac{g}{a^2},$$

et l'équation du mouvement devient

$$\frac{g}{a^2}\,dt = -\frac{dv}{(v+a)^2}.$$

L'intégration, faite de manière que $v = v_0$ réponde à $t = 0$, donne

$$\frac{gt}{a^2} = \frac{v_0 - v}{(v_0+a)(v+a)},$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{v_0 - a\lambda t}{1+\lambda t},$$

si l'on pose, pour abréger, $\frac{g}{a^2}(v_0 + a) = \lambda$.

On a, d'après cela,

$$dx = \frac{a^2\lambda\,dt}{g(1+\lambda t)} - a\,dt,$$

d'où

$$x = \frac{a^2}{g}\,l(1+\lambda t) - at,$$

en intégrant et en disposant de la constante de manière que x soit nul pour $t = 0$.

Au point extrême,

$$t = \frac{v_0}{a\lambda} \quad \text{et} \quad x = \frac{a^2}{g}\,l\left(1 + \frac{v_0}{a}\right) - \frac{v_0}{\lambda}.$$

3° Soit $g - \frac{A^2}{4B} < 0$. En posant $g - \frac{A^2}{4B} = -B\varepsilon^2$ et $v + \frac{A}{2B} = v'$, on a

$$B\,dt = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{dv'}{v'+\varepsilon} - \frac{v'-\varepsilon}{v'-\varepsilon}\right).$$

L'intégration, faite de manière que $v' = v'_0$ pour $t = 0$, v'_0 désignant la valeur initiale $v_0 + \frac{A}{2B}$ de v', donne

$$2B\varepsilon t = l\left(\frac{v'_0 - \varepsilon}{v'_0 + \varepsilon}\,\frac{dv'}{v' - \varepsilon}\right),$$

d'où l'on déduit

$$v = \varepsilon\,\frac{ke^{2B\varepsilon t} + 1}{ke^{2B\varepsilon t} - 1} - \frac{A}{2B},$$

en posant $\frac{v'_0 + \varepsilon}{v'_0 - \varepsilon} = k$.

On a, d'après cela,

$$dx = \varepsilon\,\frac{ke^{B\varepsilon t} + e^{-B\varepsilon t}}{ke^{B\varepsilon t} - e^{-B\varepsilon t}}\,dt - \frac{A\,dt}{2B},$$

d'où

$$x = \frac{1}{B}\,l\,\frac{ke^{B\varepsilon t} - e^{-B\varepsilon t}}{k - 1} - \frac{At}{B},$$

en ayant égard à la condition que x soit nul pour $t = 0$.

La vitesse v devient nulle pour la valeur de t, qui satisfait à l'équation

$$2B\varepsilon(ke^{2B\varepsilon t} + 1) - A(ke^{2B\varepsilon t} - 1) = 0,$$

de laquelle se déduit

$$t = \frac{1}{2B\varepsilon}\,l\,\frac{A + 2B\varepsilon}{k(A - 2B\varepsilon)}.$$

On a, pour cette valeur de t,

$$x = \frac{1}{B}\,l\left(\frac{2\varepsilon}{k - 1}\sqrt{\frac{Bk}{g}}\right) - \frac{A}{4B^2\varepsilon}\,l\,\frac{(A + 2B\varepsilon)^2}{4Bgk},$$

ce qui détermine la position extrême du mobile, à partir de laquelle le mouvement change de sens et devient celui du problème I.

III.

Mouvement d'un point matériel pesant et libre, ayant une vitesse initiale oblique à l'horizon, dans un fluide homogène et en repos, dont la résistance est la même que dans les deux problèmes précédents.

1° θ désignant l'inclinaison de la vitesse v acquise à la fin du temps t, et s la longueur de l'arc de la trajectoire décrit à partir de la position initiale, on a, en prenant les composantes horizontales,

$$\frac{d(v\cos\theta)}{dt} = -(A+Bv)v\cos\theta \quad \text{ou} \quad \frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta} = -A\,dt - B\,ds,$$

d'où

$$v\cos\theta = v_0\cos\theta_0\, e^{-At-Bs},$$

eu égard aux conditions initiales, θ_0 étant l'inclinaison de la vitesse initiale v_0.

Le rayon de courbure de la trajectoire est égal à $-\frac{ds}{d\theta}$ pour la position du mobile à la fin du temps t; la considération des composantes normales donne donc

$$v^2 = -g\cos\theta\frac{ds}{d\theta}.$$

Cette équation et la précédente reviennent à

$$(1) \qquad \frac{ds}{dt}\cos\theta - v_0\cos\theta_0 e^{-At-Bs} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{dt} + g\cos\theta = 0,$$

entre lesquelles l'élimination de s est facile. On a, en

différentiant,

$$\frac{d^2 s}{dt^2}\cos\theta - \frac{ds}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - v_0\cos\theta_0 \,\mathrm{B}e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s}\right) + v_0\cos\theta_0\,\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s} = 0,$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d\theta}{dt} + \frac{ds}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} - g\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

et, par l'élimination de $\frac{d^2 s}{dt^2}$,

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt}\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta - v_0\cos\theta_0\,\mathrm{B}e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s}\frac{d\theta}{dt}\right] \\ \qquad - (g\sin\theta\cos\theta + v_0\cos\theta_0\,\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s})\frac{d\theta}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

On tire de l'équation (2)

$$\frac{ds}{dt} = -g\cos\theta : \frac{d\theta}{dt},$$

et, par suite, l'équation (1) donne

$$e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s} = \frac{\cos\theta}{v_0\cos\theta_0}\frac{ds}{dt} = -\frac{g\cos^2\theta}{v_0\cos\theta_0} : \frac{d\theta}{dt}.$$

Substituant ces valeurs à $\frac{ds}{dt}$ et à $e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s}$ dans l'équation (3), on arrive à

$$(4)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\mathrm{tang}\,\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \mathrm{A}\frac{d\theta}{dt} + \mathrm{B}g\cos\theta = 0.$$

x et y désignant les coordonnées du mobile à la fin du temps t par rapport aux axes ordinairement employés pour le mouvement dans le vide, en posant $\frac{dy}{dx}$ ou $\mathrm{tang}\,\theta = y'$,

d'où

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dy'}{dt}\cos^2\theta = \dfrac{dy'}{dt}\,\dfrac{1}{1+y'^2} \\ \text{et} \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{(1+y'^2)\dfrac{d^2y'}{dt^2} - 2y'\left(\dfrac{dy'}{dt}\right)^2}{(1+y'^2)^2}, \end{cases}$$

l'équation (4) se ramène à

$$(6)\qquad \frac{d^2y'}{dt^2} - A\frac{dy'}{dt} + Bg\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

Enfin, par le changement de variable indépendante, pour lequel on pose $\dfrac{dy'}{dt} = z$, on a l'équation du premier ordre

$$(7)\qquad \left(\frac{dz}{dy'} - A\right)z + Bg\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

Il n'est pas possible d'intégrer cette équation sous forme finie, et le développement de z, en série ordonnée suivant les puissances croissantes de y', ne conduit à rien, si l'on ne suppose pas que y' reste assez voisin de zéro pendant une certaine partie du mouvement à laquelle on veut se borner. Mais, étant donnée la valeur y'_1 de y', ou, ce qui revient au même, la valeur θ_1 de θ pour une position M_1 du mobile, on peut, par la méthode de Cauchy (*Leçons de Calcul différentiel et intégral*, rédigées par M. l'abbé Moigno, t. II, p. 385 et suiv.; 1844), calculer la valeur correspondante z_1 de $z = \dfrac{dy'}{dt}$, et, cela fait, on a la valeur v_1 de v par la formule

$$(8)\qquad v = -g\sqrt{1+y'^2} : \frac{dy'}{dt},$$

qui se déduit de l'équation (3) et de la première des for-

mules (5). Pendant une durée assez petite τ à partir de l'instant où le mobile arrive en M, on admettra qu'il parcourt dans la direction $M_1 T_1$, déterminée par $y'=y'_1$, de la vitesse v_1, l'espace $M_1 M_2 = v_1 \tau$; et l'on considérera M_2 comme appartenant à la trajectoire. Pour M_2, on aura $y' = y'_1 + z_1 \tau = y'_2$, et ainsi de suite. Les premières valeurs de θ et de v seront naturellement, dans ce calcul, leurs valeurs initiales θ_0, v_0.

2° Si l'angle θ_0 avait une valeur positive assez petite, et si l'on ne considérait que la partie de la trajectoire située du côté des y positifs, y'^2 serait toujours une quantité très-petite. En négligeant y'^2 par rapport à 1 dans l'équation (6), elle se réduit à

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} - A \frac{dy'}{dt} + Bg = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y' = C - C' g e^{At} + \frac{Bgt}{A}.$$

La formule (8), réduite de même à $v = -g : \frac{dy'}{dt}$, donne, en y remplaçant y' par sa valeur,

$$v = \frac{A}{C'A^2 e^{At} - B}.$$

Pour que $v = v_0$ et $y' = \tang\theta_0$ répondent à $t = 0$, il faut prendre

$$C' = \frac{A + Bv_0}{A^2 v_0}, \quad C = \tang\theta_0 + C'g;$$

on a donc

$$(9) \qquad y' = \tang\theta_0 - g \frac{A + Bv_0}{A^2 v_0} (e^{At} - 1) + \frac{Bgt}{A},$$

$$(10) \qquad v = \frac{A v_0}{(A + Bv_0)e^{At} - Bv_0}.$$

De $dx = ds \cos\theta$ qu'on doit réduire à $dx = ds = v\,dt$, et de la valeur précédente de v, il résulte

$$dx = \frac{A v_0 e^{-At} dt}{A + B v_0 (1 - e^{-At})},$$

d'où, en intégrant de manière que x soit nul pour $t = 0$,

$$(11) \qquad x = \frac{1}{B} l \frac{A + B v_0 (1 - e^{-At})}{A}.$$

L'élimination de t entre les équations (9) et (11) conduit à

$$dy = \left(\operatorname{tang}\theta_0 - g \frac{A + B v_0}{A v_0} \frac{e^{Bx} - 1}{A + B v_0 - A e^{Bx}} - \frac{Bg}{A^2} l \frac{A + B v_0 - A e^{Bx}}{B v_0}\right) dx,$$

dont l'intégrale, prise sous la condition que y soit nul pour $x = 0$, est

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} y = &\left(\operatorname{tang}\theta_0 + \frac{g}{A v_0}\right) x + \frac{g}{A^2}(1 - Bx) l \frac{A + B v_0 - A e^{Bx}}{B v_0} \\ &- \frac{B^2 g}{A} \int_0^x \frac{x\,dx}{(A + B v_0) e^{-Bx} - A}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation permet de calculer approximativement, lorsque θ_0 est assez petit, la valeur x_1 de x, différente de zéro, pour laquelle y est nul (*amplitude du jet*), et les valeurs de y correspondant à des valeurs de x entre zéro et x_1. Au moyen de ces valeurs, on pourra décrire à peu près la partie de la trajectoire qui est au-dessus de l'axe des x. Il n'y a aucun compte à tenir de l'asymptote verticale que l'équation (12) indique, de même que la formule (11).

3° Les résultats connus pour une résistance simplement proportionnelle au carré de la vitesse se déduisent

facilement de l'analyse précédente. En faisant $A = 0$ dans l'équation (7), elle se réduit effectivement à

$$z\,dz + Bg\sqrt{1+y'^2}\,dy' = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z^2 + Bg\left[y'\sqrt{1+y'^2} + l(y' + \sqrt{1+y'^2}) - \gamma\right] = 0,$$

γ étant une constante arbitraire. On tire de là

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{Bg}}\frac{dy'}{\sqrt{Y}},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\gamma - y'\sqrt{1+y'^2} - l(y' + \sqrt{1+y'^2}) = Y.$$

D'après la formule (8) et d'après

$$(13) \qquad dx = \frac{v\,dt}{\sqrt{1+y'^2}},$$

qui s'appliquent à toute loi de la résistance, on a ensuite

$$v = \sqrt{\frac{g}{B}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{Y}}, \quad dx = -\frac{1}{B}\frac{dy'}{Y},$$

puis

$$dy = -\frac{1}{B}\frac{y'\,dy'}{Y}, \ldots.$$

4° Si l'on supposait $B = 0$, c'est-à-dire la résistance proportionnelle à la vitesse, ce qui paraît ne pouvoir convenir qu'à un mouvement assez lent, par conséquent peu étendu et de vitesse initiale assez petite, l'équation (6), réduite à

$$\frac{d^2y'}{dt^2} - A\frac{dy'}{dt} = 0,$$

donnerait immédiatement

$$\frac{dy'}{dt} = Ay' - C,$$

d'où

(14) $$t = \frac{1}{A}\, l\, \frac{C - Ay'}{C'},$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. Par la substitution de sa valeur à $\frac{dy'}{dt}$ dans la formule (8), on a

$$v = g\,\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{C - Ay'}.$$

C et C' sont donc déterminées par

$$C = A \tang\theta_0 + \frac{g}{v_0 \cos\theta_0}, \quad C' = \frac{g}{v_0 \cos\theta_0},$$

en raison de ce que $v = v_0$ et $y' = \tang\theta_0$ doivent répondre à $t = 0$.

On tire de la formule (14)

$$y' = \frac{C}{A} - \frac{C'}{A} e^{At}.$$

En remplaçant y' par cette valeur dans la formule (13), il vient

$$dx = -\frac{g\,dy'}{(C - Ay')^2},$$

d'où

(15) $$x = C'' - \frac{g}{A(C - Ay')},$$

et la constante C'' est donnée par

$$C'' = \frac{g}{A(C - A\tang\theta_0)} = \frac{v_0\cos\theta_0}{A},$$

d'après la condition que $x = 0$ pour $y' = \tang\theta_0$, eu égard à la valeur de C.

On a enfin

$$dy = -\frac{gy'\,dy'}{(C - Ay')^2} = \frac{g}{A}\left[\frac{dy'}{C - Ay'} - \frac{C\,dy'}{(C - Ay')^2}\right],$$

d'où

$$y = C''' - \frac{g}{A^2}\left[l(C - Ay') + \frac{C}{C - Ay'}\right],$$

et, en remplaçant y' par sa valeur tirée de l'équation (15), il vient

$$y = \frac{C}{A}x + \frac{g}{A^2}\,l\left(1 - \frac{x}{C''}\right),$$

après avoir déterminé la dernière constante C'', de manière que y soit nul en même temps que x.

La courbe que cette équation représente, et qui a pour asymptote la verticale $x = C'' = \frac{v_0 \cos\theta_0}{A}$, est facile à construire.

NOTE SUR UN PASSAGE DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS;

PAR M. H. LAURENT.

A la page 181 de la *Théorie analytique des Probabilités*, Laplace énonce le théorème suivant :

« La probabilité d'un événement composé de deux événements est le produit de la probabilité d'un de ces événements par la probabilité que, cet événement étant arrivé, l'autre aura lieu. »

Ce théorème n'est pas parfaitement exact, et il est es-

sentiel d'ajouter, ainsi que cela ressort de la démonstration que donne Laplace : « Pourvu que, à chaque cas relatif au premier événement, corresponde toujours un même nombre de cas relatifs au second, quelle que soit la façon dont les épreuves se présentent. »

Pour montrer toute l'importance du correctif que je propose d'adjoindre au théorème de Laplace, je vais traiter une question dans laquelle une application trop précipitée du principe de la probabilité composée conduirait à un résultat inexact.

Problème. — On jette au hasard n billes dans une boîte cylindrique dont la base est divisée en deux compartiments A, B égaux, en sorte que les billes peuvent tomber dans l'un ou dans l'autre compartiment avec la même facilité. On prend les billes tombées dans le compartiment A, et on les jette de nouveau dans la boîte : on demande la probabilité pour qu'il tombe a billes au premier coup, et b billes au second coup dans le compartiment en question.

Si l'on appliquait le théorème ci-dessus mentionné, on raisonnerait comme il suit : La probabilité de mettre a billes au premier coup dans A est C_n^a, nombre des cas favorables, divisé par la somme des combinaisons C_n^0, C_n^1, $C_n^2, \ldots$, C_n^n, nombre total des cas possibles et également possibles qui peuvent se présenter. Cette somme étant égale à 2^n, on a, pour la probabilité de mettre a billes au premier coup dans A,

$$C_n^a : 2^n.$$

Cet événement ayant eu lieu, il reste à calculer la probabilité de mettre b billes sur a au second coup dans le compartiment A; cette probabilité est

$$C_a^b : 2^a.$$

On aurait donc, par le principe de la probabilité composée,

$$C_n^a C_a^b : 2^{n+a}.$$

Or il est facile de voir que ce résultat est absurde.

Évaluons, en effet, directement le nombre des cas favorables et des cas possibles, quand on attend l'événement composé. Il est clair que le nombre des cas favorables est $C_n^a C_a^b$; en effet, les cas favorables sont les cas dans lesquels on obtient dans A une combinaison de n billes a à a au premier coup, et une combinaison de a billes b à b au second. A chacun des cas favorables de la première épreuve correspondent C_a^b cas favorables de la seconde : on a donc en tout $C_a^b \times C_n^a$ cas favorables.

Au premier coup, on peut mettre dans A : 0, 1, 2,..., n billes. Si l'on met 0 bille au premier coup, on pourra en mettre 0, 1, 2,..., n au second coup, ce qui produit déjà $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$ ou 2^n cas possibles. Mais on peut mettre 1 bille au premier coup, et cela de C_n^1 manières; au second coup, on pourra alors en mettre 0, 1, 2,..., $n-1$, ce qui constitue $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}$ ou 2^{n-1} cas possibles, relativement au second coup : donc on aura $2^{n-1} C_n^1$ cas possibles, en mettant une seule bille au premier coup dans A; en continuant ce mode de raisonnement, on verrait facilement qu'en mettant 2 billes, 3 billes, etc., au premier coup, on a $2^{n-2} C_n^2$, $2^{n-3} C_n^3$, etc., cas possibles correspondants; on a donc en tout

$$2^n + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + \ldots + 2 C_n^{n-1} + C_n^n \text{ cas possibles.}$$

Ce nombre est égal, comme on sait, à 3^n; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{C_n^a C_a^b}{3^n}.$$

On verrait, d'une façon toute semblable, que l'ex-

pression

$$\text{(1)} \qquad \frac{C_n^a C_a^b C_b^c \ldots C_k^l}{\mu^n},$$

dans laquelle μ désigne le nombre des lettres $a, b, c, \ldots, l, n$, est la probabilité P de mettre a billes dans le compartiment A au premier coup, d'en mettre b au second,..., l au $(\mu - 1)^{ième}$.

L'expression (1) peut encore s'écrire

$$\frac{1}{\mu^n} \frac{n!}{a!(n-a)!} \frac{a!}{b!(a-b)!} \cdots \frac{k!}{l!(k-l)!} = \text{P}.$$

En employant le symbole $n!$ pour représenter le produit $1.2.3\ldots n$, on a encore

$$\text{P} = \frac{1}{\mu^n} \cdot \frac{n!}{(n-a)!(a-b)!\ldots!(k-l)!\,l!}.$$

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS INFINITÉSIMAUX RELATIFS AUX LIGNES A DOUBLE COURBURE

(voir même tome, p. 126);

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

V. L'interprétation géométrique des équations (4) et (6) nous conduit à deux théorèmes importants, et à l'expression des rayons de courbure en un point quelconque.

L'équation (4) donne

$$\text{(4 bis)} \qquad b_2 = \frac{1}{2\text{R}_0};$$

mais $b_2 = \lim \frac{y}{s^2}$; puis la distance de M à la tangente en O, qui est $\sqrt{y^2 + z^2}$, est sensiblement égale à y, parce

que z est infiniment plus petit que y. Il en résulte que la distance d'un point à la tangente au point infiniment voisin est égale au carré de l'arc qui sépare ces deux points, divisé par le double du rayon de courbure; ou bien l'inverse du rayon de courbure s'obtient en divisant le double de la distance à la tangente par le carré de l'arc.

Considérons donc la tangente en un point x, y, z, et le point voisin dont les coordonnées sont

$$x + dx + \frac{1}{2} d^2 x, \quad y + \ldots;$$

on sait former la distance de ce point à la tangente, et en la divisant par ds^2 on obtient la première courbure au point x, y, z :

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{ds^3} \sqrt{(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2 + \ldots}.$$

L'équation (6) donne

$$(6\ bis) \qquad c_3 = \frac{1}{6 R_0 r_0};$$

mais $c_3 = \lim \frac{z}{s^3}$; z est la distance de M au plan osculateur en O. Donc la distance d'un point au plan osculateur en un point infiniment voisin est égale au cube de l'arc qui sépare les deux points divisé par six fois le produit des deux rayons de courbure. Le point infiniment voisin de x, y, z a pour coordonnées

$$x + dx + \frac{1}{2} d^2 x + \frac{1}{6} d^3 x + \ldots, \quad y + \ldots;$$

en prenant sa distance au plan osculateur en x, y, z, on a

$$\frac{ds^3}{6 R r} = \frac{\sum \frac{1}{6} (dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)\, d^3 x}{\sqrt{\sum (dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2}}.$$

En remplaçant R par sa valeur (6), il vient

$$\frac{1}{r} = \frac{\sum (dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,d^3x}{\sum (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2}.$$

Si, au contraire, on remplace le radical par sa valeur tirée de l'équation (6), on trouve

$$(8) \quad \frac{1}{rR^2} = \frac{\sum (dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,d^3x}{ds^6} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}.$$

VI. Les formules relatives au changement de variable nous permettraient de simplifier l'équation (6) dans le cas où s est la variable indépendante; puis, en faisant le carré du déterminant (8), nous obtiendrions avec M. Hermite (*Cours de l'École Polytechnique*) un résultat remarquable. Mais notre théorème II nous conduit plus facilement au même but. Je remarque que, pour $s = 0$, on a

$$\sum \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0^2 = 4b_2^2 = \frac{1}{R_0^2}.$$

Si l'on changeait d'axes, le point O deviendrait un point quelconque, le premier membre de l'équation conserverait sa valeur, si ce n'est qu'il y aurait à supprimer l'indice o, et l'on aurait généralement

$$\frac{1}{R^2} = \sum \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2.$$

Calculons les dérivées à l'aide des séries (1), et ordon-

nons :

$$\frac{1}{R^2}=4b_2^2+24b_2b_3s+[16b_2^4+48b_2b_4+36(b_3^2+c_3^2)]s^2+\ldots.$$

Élevons à la puissance $-\frac{1}{2}$:

$$R=\frac{1}{2b_2}-\frac{3}{2}\frac{b_3}{b_2^2}s-\left(b_2+3\frac{b_4}{b_2^2}+\frac{9}{4}\frac{c_3^2}{b_2^3}-\frac{9}{2}\frac{b_3^2}{b_2^3}\right)s^2+\ldots.$$

Donc

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{dR_0}{ds}&=-\frac{3}{2}\frac{b_3}{b_2^2},\\ \frac{d^2R^0}{ds^2}&=-\frac{1}{2}b_2-\frac{3}{2}\frac{b_4}{b_2^2}-\frac{9}{8}\frac{c_3^2}{b_2^3}+\frac{9}{4}\frac{b_3^2}{b_2^3},\end{aligned}\right.$$

en désignant par $\frac{dR_0}{ds}$, etc., ce que deviennent $\frac{dR}{ds}$, etc., pour $s=0$.

On trouve de la même manière, en faisant $s=0$, et tenant compte de la valeur de b_3 donnée par la deuxième équation (9),

$$\sum\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0^2=36(a_3^2+b_3^2+c_3^2)=\frac{1}{R_0^4}+\frac{1}{R_0^4}\left(\frac{dR_0}{ds}\right)^2+\frac{1}{R_0^2r_0^2};$$

en changeant d'axes, on voit qu'on a pour un point quelconque la relation donnée par M. Hermite :

$$(10)\qquad \sum\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2=\frac{1}{R^4}+\frac{1}{R^4}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2+\frac{1}{R^2r^2}.$$

Mais le moyen le plus simple de calculer r consiste à développer le déterminant (8); on trouve, en négligeant s^2,

$$\frac{1}{rR^2}=\frac{1}{r}(4b_2^2+24b_2b_3s+\ldots)=12b_2c_3+48b_2c_4s+\ldots,$$

d'où

$$r = \frac{1}{3c_3}\left[b_2 + \left(6b_3 - \frac{4b_2c_3}{c_4}\right)s\right].$$

Tenant compte des valeurs de b_2, b_3, c_3 :

$$(11)\quad \begin{cases} r = r_0 - \left(\dfrac{2r_0}{R_0}\dfrac{dR_0}{ds} + 24R_0r_0^2c_4\right)s + \ldots, \\ \dfrac{dr_0}{ds} = -2\dfrac{r_0}{R_0}\dfrac{dR_0}{ds} - 24R_0r_0^2c_4. \end{cases}$$

VII. Les équations (4 *bis*), (6 *bis*), (9), (11) et (3) nous donnent les valeurs des coefficients des séries (1) en fonction des deux rayons de courbure au point O. J'en forme le tableau en supprimant les indices de R et de r, ainsi que je le ferai dans les deux paragraphes suivants ; il n'y a pas de confusion à craindre, puisqu'il ne s'agit que d'éléments relatifs au point O :

$$a_3 = -\frac{1}{6R^2},\quad a_4 = \frac{1}{8R^3}\frac{dR}{ds},$$

$$b_2 = \frac{1}{2R},\quad b_3 = -\frac{1}{6R^2}\frac{dR}{ds},$$

$$b_4 = -\frac{1}{24R^3}\left[1 + \frac{R^2}{r^2} - 2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + R\frac{d^2R}{ds^2}\right],$$

$$c_3 = \frac{1}{6Rr},\quad c_4 = -\frac{1}{24Rr}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{2}{R}\frac{dR}{ds}\right).$$

(*A suivre.*)

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. G. Zolotareff. — En vous adressant une remarque relativement à mon article

sur l'équation $Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} pZ^2 = 4X$ (*Nouvelles Annales*, t. XI, 2ᵉ série), j'espère que vous lui donnerez place dans votre estimable journal.

Lorsque ma Note avait été déjà publiée, j'ai appris qu'il y avait longtemps que la détermination des fonctions Y et Z avait été l'objet d'une Note de M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. II, 2ᵉ série). On y trouve une méthode de former les polynômes Y et Z au moyen de la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i,$$

méthode différente de celle que j'ai donnée dans mon article. L'illustre auteur montre encore dans sa Note comment on peut arriver aux formules analytiques pour les coefficients des fonctions Y et Z.

Extrait d'une Lettre de M. A. Transon. — J'extrais d'une récente Lettre de M. Catalan le passage suivant qui pourra intéresser vos lecteurs :

« ... Votre construction de la *moyenne géométrique* (p. 18) me paraît curieuse, et j'en conclus un petit théorème de Géométrie curieux aussi, ce me semble : *Le cercle* O *étant donné, ainsi que la corde* AB *qui soustend dans ce cercle le segment* ACB, *si l'on prend sur la bissectrice de l'angle variable* ACB *les segments* CM, CM′ *égaux, chacun, à la moyenne proportionnelle entre* CA *et* CB, *le lieu des points* M *et* M′ *est la circonférence décrite du point* E *comme centre avec* EA *comme rayon* (*le point* E *est l'extrémité du diamètre perpendiculaire à* AB). *Ainsi la circonférence* O *se comporte en un certain sens comme une ellipse qui aurait pour foyers* A *et* B.... »

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1052

(voir 2e série, t. X, p. 558);

PAR M. GAMBEY.

Trouver la trajectoire orthogonale d'un système de paraboles égales, tangentes en leur sommet à une droite fixe. (H. BROCARD.)

L'équation générale des paraboles égales tangentes à l'axe des y est

$$(y-a)^2 - 2px = f(x, y, a) = 0,$$

a étant une indéterminée.

Il faut (STURM, *Calcul intégral*, p. 49) éliminer a entre

$$f(x, y, a) = 0,$$

et

$$\frac{df}{dx}dy - \frac{df}{dy}dx = 0,$$

ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2x}{p}},$$

dont l'intégrale générale est

$$(y-c)^2 = \frac{8}{9p}x^3,$$

c étant une constante arbitraire.

Cette trajectoire est de la même nature que la développée de la parabole.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Pellissier.

Question 1084

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 288);

Par M. KOEHLER.

Les coniques, inscrites dans un quadrilatère fixe, qui touchent une courbe de troisième classe donnée K, *sont au nombre de douze. Les douze points de contact, les neuf points de rebroussement de* K *et les six sommets du quadrilatère circonscrit sont situés sur une même courbe du cinquième ordre.* (Laguerre.)

Ces propriétés sont une conséquence des théorèmes généraux suivants donnés par M. Chasles (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1864) :

1° Dans toute série de coniques dont les caractéristiques sont μ, ν, il y a $\mu n + \nu m$ coniques qui touchent une courbe donnée d'ordre m et de classe n.

Dans le cas actuel, on a $\mu = 2$, $\nu = 1$, puisqu'il y a deux coniques de la série passant par un point donné, et une seule tangente à une droite donnée; si la courbe K est la plus générale de sa classe, $n = 3$, $m = 6$; il y a donc $2.3 + 6$, ou douze coniques tangentes à K.

2° Le lieu des points d'intersection des tangentes communes à une courbe de classe n et aux coniques d'une série (μ, ν) est d'ordre $\nu(2n - 1)$. Dans le cas de l'énoncé, cet ordre est 5. Les six sommets du quadrilatère appartiennent au lieu; car, par chacun de ces points, on peut mener trois tangentes à K, et chacune de ces tangentes touche une conique de la série. Il en est de même

pour les neuf points de rebroussement; car la tangente de rebroussement touche une courbe de la série, et le point de rebroussement est l'intersection de deux tangentes communes infiniment voisines.

Enfin les douze points de contact sont évidemment sur la courbe du cinquième ordre.

Note de M. Laguerre. — Soient

$$(a, b, c, d)(\lambda, \mu)^3 = 0, \quad (A, B, C)(\lambda, \mu)^2 = 0, \quad (A', B', C')(\lambda, \mu)^2 = 0$$

les équations respectives d'une courbe de troisième classe K et de deux coniques C et C′ inscrites dans le quadrilatère Q.

L'équation

$$J = \begin{vmatrix} ac - b^2 & ad - bc & bd - c^2 \\ A & B & C \\ A + \lambda A' & B + \lambda B' & C + \lambda C' \end{vmatrix} = 0$$

(qui est indépendante de λ) représente une courbe du cinquième ordre P (*).

L'invariant J s'annule :

1° Pour $ac - b^2 = ad - bc = bd - c^2 = 0$: donc P contient les neuf points de rebroussement de K;

2° Pour $a = b = A + \lambda A' = B + \lambda B' = 0$: donc P contient les douze points des coniques tangentes à K et inscrites dans Q;

3° Pour $A + \lambda A' = B + \lambda B' = C + \lambda C' = 0$: donc P contient les six sommets du quadrilatère Q.

Question 1086

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 288);

PAR M. KOEHLER.

Si, par le foyer commun F *de deux coniques, on mène une droite quelconque, et qu'aux points où elle coupe les deux coniques on mène les tangentes aux coniques en ces points, ces quatre tangentes formeront un qua-*

(*) *Voir* mon *Mémoire de Géométrie analytique;* LIOUVILLE, 2ᵉ série, t. XVII, § II.



drilatère dont les diagonales seront les cordes communes aux deux coniques.

La droite qui joint les foyers non communs des deux coniques jouit de la même propriété.

(E. Lemoine.)

La première partie de l'énoncé est évidente; car un foyer commun à deux coniques n'est autre chose qu'un ombilic, et toute droite passant par un ombilic jouit de la propriété indiquée. Les deux cordes communes, diagonales du quadrilatère formé par les quatre tangentes, sont celles qui se coupent au point de rencontre des deux directrices correspondant au foyer commun.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, je remarquerai que la droite à l'infini (limitée aux points circulaires à l'infini) peut être considérée comme une conique infiniment aplatie L, ayant un ombilic commun F avec les deux coniques données C_1 et C_2. En d'autres termes, C_1, C_2 et L sont inscrites dans l'angle des tangentes imaginaires issues de F. Le second foyer F_1 de C_1 est l'ombilic conjugué de F pour L et C_1; de même F_2 est l'ombilic conjugué de F pour L et C_2. La droite F_1F_2 doit donc, d'après un théorème connu (*), passer par l'ombilic de C_1 et de C_2; ce point n'est autre chose que l'intersection de F_1F_2 avec la polaire commune du point de concours des deux directrices relatives à F, par rapport aux deux courbes.

Il résulte de là que la droite F_1F_2 jouit de la même propriété qu'une droite quelconque passant en F.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Pellissier.

(*) Le théorème auquel je fais allusion est le suivant :

« Quand trois coniques ont un ombilic commun, les trois autres ombilics conjugués à celui-là sont en ligne droite. »

(Chasles, *Traité des sections coniques*, n° 382.)

Question 1102

(voir 2e série, t. XI, p. 527);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots(p+1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

(C. DE POLIGNAC.)

On a les identités suivantes :

$$2(n+1)\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^p \frac{n^!}{(n-p)^!(p+1)^!} - 1$$

$$= -1 + \sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^{p+1} \frac{(n+1)^!}{(n-p)^!(p+1)^!}$$

$$= -1 - \sum_{p=1}^{p=n+1}(-1)^p 2^p \frac{(n+1)^!}{(n+1-p)^! p^!}$$

$$= -\sum_{p=0}^{p=n+1}(-1)^p 2^p \frac{(n+1)^!}{(n+1-p)^! p^!} = -(1-2)^{n+1} = (-1)^n,$$

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^p \frac{n^!}{(n-p)^!(p+1)^!} = \frac{1}{2}\,\frac{1+(-1)^n}{n+1}.$$

Note. — La question 1110 a aussi été résolue par MM. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; Humbert, maître répétiteur au lycée de Besançon.

Question 1109

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 528);

PAR M. POUJADE,
Professeur au lycée de Nice.

Par les sommets d'un triangle pris deux à deux, on fait passer trois paraboles ayant un point de contact commun. Les diamètres de ces paraboles qui passent par ce point rencontrent les côtés correspondants du triangle en des points tels, que les droites qui les joignent aux sommets opposés concourent en un même point. (G. FOURET.)

Une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente au sommet a pour équation $y^2 = 2px$. Les deux segments, déterminés par ce diamètre sur une corde quelconque, sont dans le rapport des ordonnées des extrémités de la corde, qui est égal à la racine carrée de celui des abscisses. Si l'on change l'axe des x, tandis que l'origine et l'axe des y demeurent invariables, le rapport des abscisses ne change pas.

Ceci posé, rapportons les trois paraboles au point de contact pris pour origine et à la tangente commune pour axe des y (l'axe des x étant quelconque). Soient A', A'', A''' les trois sommets du triangle, x', x'', x''' leurs abscisses. Le diamètre de la parabole qui passe par A' et A'' coupe le côté $A'A''$ dans le rapport $\sqrt{\frac{x'}{x''}}$; de même $A''A'''$ est coupé par le diamètre correspondant dans le rapport $\sqrt{\frac{x''}{x'''}}$, enfin $A'''A'$ dans le rapport $\sqrt{\frac{x'''}{x'}}$. Le produit de ces trois nombres est l'unité, et les points de division sont sur les côtés du triangle et non sur leurs pro-

longements; donc les droites qui joignent ces points aux sommets opposés concourent en un même point.

Note. — La même question a été résolue par MM. Bourguet, à Nantes; Brocard; Genty et Moret-Blanc.

QUESTIONS.

1111. On sait que si a_1 est une valeur approchée de $\sqrt{n}$,

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{n}{a_1}\right),\quad a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{n}{a_2}\right),\quad a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{n}{a_3}\right),\ldots$$

seront des valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{n}$ (*).

On sait aussi que

$$\sqrt{a_1^2 + r} = a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}$$

Or M. *Wœpcke* a démontré (**) que, si dans le second membre de cette équation on s'arrête au troisième quotient incomplet, on aura a_2.

On demande à quels quotients incomplets il faudra s'arrêter dans le second membre de cette même équation pour avoir

$$a_3,\quad a_4,\quad a_5,\ldots,$$

ou bien de quelle manière on peut démontrer que les valeurs

$$a_3,\quad a_4,\quad a_5,\ldots$$

(*) *Traité d'Arithmétique*, par Joseph Bertrand, p. 245 et suiv.; Paris 1867; 4e édition.

(**) *Journal Asiatique*, 5e série, t. IV, p. 384; Paris, 1854. — *Recherches sur l'Histoire des Sciences mathématiques chez les Orientaux, etc.*, par M. Wœpcke, p. 37; Paris, 1855.

ne sont pas comprises dans l'expression

$$a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}$$

(BALTHAZAR BONCOMPAGNI)

1112. Montrer que la développée de l'ellipse peut être considérée comme l'enveloppe d'ellipses concentriques et co-axales à la proposée. (C. DE POLIGNAC.)

1113. Le rayon de courbure du point de l'ellipse, qui est égal au demi-diamètre conjugué de ce point, a son extrémité sur ce diamètre. Il est tangent au cercle concentrique à l'ellipse ayant la différence de ses axes pour rayon. (C. DE POLIGNAC.)

1114. Les cercles concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement la somme et la différence de ses axes, interceptent, sur toute normale à l'ellipse, des segments dont deux sont toujours égaux. En donner l'expression. (C. DE POLIGNAC.)

1115. Montrer que l'on peut tracer une infinité d'ellipses concentriques et co-axales à une ellipse donnée, jouissant deux à deux de la même propriété. Les axes de l'ellipse peuvent être considérés comme deux ellipses (non correspondantes) de la série. (C. DE POLIGNAC.)

1116. Deux ellipses quelconques de la série interceptent, sur toute normale à l'ellipse donnée, deux segments dont le rapport est constant. (C. DE POLIGNAC.)

Nous recevons de M. RUCHONNET, au moment de mettre sous presse, la démonstration des trois formules qui lui ont été proposées par M. GILBERT, et nous les tenons dès aujourd'hui à la disposition de nos lecteurs.

TABLE DES MATIÈRES.

Avril 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

MAI 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

RESAL (H.), Ingénieur des Mines, adjoint au Comité d'Artillerie pour études scientifiques. — **Traité de Mécanique générale**, comprenant *Leçons professées à l'École Polytechnique.* 3 vol. in-8, se vendant sé rément :

Tome I : *Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. De l'équilibre et du mouvement des corps solides.* In-8, avec figu dans le texte; 1873 .... 9 fr. 50

Tome II : *Frottement. — Équilibre intérieur des corps. — Théorie m thématique de la poussée des terres. — Équilibre et mouvements vibr toires des corps isotropes. — Hydrostatique. — Hydrodynamique. Hydraulique. — Thermodynamique, suivie de la théorie des armes à f* In-8 (sous presse).

Tome III : *Théorie des machines proprement dites, des récepteurs h drauliques et des machines à vapeur.* In-8 (sous presse).

Cet Ouvrage peut être considéré comme une introduction aux Appli cations industrielles de la Mécanique, à la Mécanique analytique, à la Mé nique céleste et aux branches de la Physique mathématique qui se rattach à la Mécanique ; ce qui explique le titre sous lequel on a cru devoir le fa paraître.

La première Partie est consacrée à l'étude du mouvement considéré ind pendamment de ses causes. Elle est, pour le fonds, empruntée au *Tra de Cinématique pure* du même Auteur, dont elle reproduit, avec quelq modifications, les matières qui ont trait à la Mécanique. On y a introd toutes les questions relatives au mouvement d'un point, dont la solut n'exige aucune notion sur la masse et la force ; les théorèmes de Binet l'accélération aréolaire ; enfin une étude géométrique des perturbations planètes, basée sur la théorie des accélérations, avec l'application au cas l'accélération perturbatrice est proportionnelle au carré de la vitesse et dirigée en sens inverse de cette vitesse.

La seconde Partie du premier volume traite du mouvement des systèm matériels et de ses causes. En ce qui concerne le point matériel, on a ajo à ce que renferment les Traités de Mécanique rationnelle la solution Jacobi, notablement simplifiée, du problème du mouvement d'un po pesant dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à une puissan quelconque de la vitesse ; l'étude du mouvement du pendule dans un mil résistant ; une théorie du pendule à oscillations elliptiques, et enfin u démonstration géométrique du principe de la moindre action.

L'Auteur a groupé ensuite tous les théorèmes généraux relatifs systèmes matériels, quelle qu'en soit la nature, en y faisant figurer théorèmes de MM. Bertrand, Lejeune-Dirichlet, Yvon Villarceau et Clausi la similitude en Mécanique (de Newton, exhumée par M. Bertrand), théorie des petits mouvements comprenant celle de la stabilité de l'éq libre, enfin les formules de Cauchy. Ces généralités sont suivies de l'étu des corps solides en commençant par la Statique qui forme un Chapi dans lequel sont établis, par des démonstrations simples, tous les théorè connus sur l'équilibre des solides, les systèmes articulés (avec applicat aux ponts suspendus, etc.), les polygones et courbes funiculaires ; ce C pitre se termine par la mise en équations du mouvement d'une cou funiculaire plane avec application aux petites oscillations d'un pendule d la masse du fil n'est pas négligeable, d'une chaînette et d'un câble de p suspendu.

L'Auteur a complété la théorie de la rotation des corps, exposée à la

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 145);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

42. Faisons une rapide digression. Les relations trouvées entre m, x, y, z pourraient servir à démontrer que, avec l'involution précédente, on a aussi les trois autres

$$AF.DC.EB \stackrel{\wedge}{=} DF.EC.AB,$$

$$BF.CD.EA \stackrel{\wedge}{=} CF.ED.BA,$$

$$FA.DE.CB \stackrel{\wedge}{=} DA.CE.FB,$$

très-connues en Géométrie supérieure, et résultant de la considération des trois autres triangles ADE, BCE, FDC, coupés chacun par une droite.

Si l'une des équipollences précédentes a lieu pour six points d'une droite, les trois autres en résultent nécessairement; par conséquent, en vertu du théorème général du n° 24, la même propriété subsistera pour six points d'un plan. En nous reportant à la signification des équipollences (16), nous voyons que ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Si AEBCFD *est un hexagone dans lequel trois angles non adjacents valent ensemble quatre droits, et où le produit de trois côtés non adjacents soit égal au produit des trois autres, nous aurons les mêmes propriétés pour les trois hexagones* AFDCEB, BFCDEA, FADECB, *qui ont les mêmes sommets opposés que le premier, mais pris dans un ordre différent.*

Par rapport à ces hexagones, il existe un point I pour

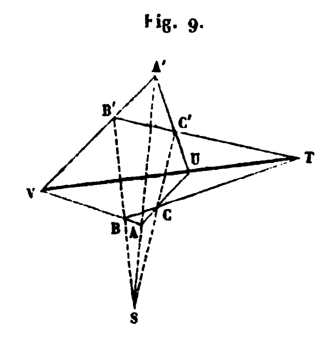
lequel ont lieu les équipollences

$$IA.IC \triangleq IB.ID \triangleq IE.IF,$$

sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

43. Donnons un second exemple de la manière d'exprimer la condition que des points sont en ligne droite, au moyen de coefficients numériques. Il s'agit de démontrer ce théorème de Desargues : *Si les sommets de deux triangles* ABC, A'B'C' (*fig.* 9) *sont en ligne droite avec*

Fig. 9.



un point fixe S, *les points de concours* T, U, V *de leurs côtés correspondants seront aussi en ligne droite.*

Les conditions données sont exprimées par

$$SA' \triangleq a\,SA, \quad SB' \triangleq b\,SB, \quad SC' \triangleq c\,SC,$$

a, b, c étant trois coefficients numériques indéterminés. De même, la condition que V appartienne à la droite AB est exprimée par

$$AV \triangleq n\,AB,$$

ou, en réduisant tout à SA, SB, SC, par

$$SV \triangleq SA + n\,AB \triangleq (1-n)SA + n\,SB.$$

Comme V doit aussi appartenir à la droite A′B′, on aura pareillement

$$SV \triangleq (1 - m) SA' + m SB' \triangleq a(1 - m) SA + bm SB.$$

En comparant les deux expressions de SV, la règle II nous donne

$$1 - n = a(1 - m), \quad n = bm.$$

Tirant de ces relations la valeur de m, on aura

$$SV \triangleq \frac{1 - b}{a - b} SA' + \frac{a - 1}{a - b} SB'.$$

Nous trouverons exactement de la même manière

$$ST \triangleq \frac{1 - c}{b - c} SB' + \frac{b - 1}{b - c} SC',$$

$$SU \triangleq \frac{1 - a}{c - a} SC' + \frac{c - 1}{c - a} SA';$$

d'où l'on déduit

$$(a - b) SV \triangleq \frac{(1 - b)(c - a)}{c - 1} SU + \frac{(a - 1)(b - c)}{1 - c} ST,$$

ou

$$(a - b - ac + bc) SV + (c - a + ab - bc) SU$$
$$+ (b - c + ac - ab) ST \triangleq 0.$$

Remarquant que l'on a

$$TV \triangleq SV - ST, \quad TU \triangleq SU - ST,$$

nous voyons qu'on obtient

$$(a - b - ac + bc) TV + (c - a + ab - bc) TU \triangleq 0,$$

c'est-à-dire (4) que TV a la même inclinaison que TU, ou que TUV est une ligne droite.

44. J'attirerai l'attention du lecteur, en raison des fréquentes occasions qui se présentent d'utiliser cette remarque, sur la manière de rapporter à un point S un point quelconque V d'une droite AB, au moyen de l'équipollence

$$SV \triangleq (1-n)\,SA + n\,SB,$$

n étant un coefficient indéterminé. On remarquera aussi cette conséquence, dépendant de la même formule, que, si

$$r\,SV + q\,SU + p\,ST \triangleq 0,$$

et qu'on ait

$$r + q + p = 0,$$

les trois points V, U, T sont en ligne droite, parce qu'il en résulte

$$r\,TV + q\,TU \triangleq 0.$$

Les calculs des coefficients numériques pourront quelquefois devenir un peu longs, surtout si le choix n'en a pas été fait avec discernement; mais il ne se présentera aucune difficulté, et l'on parviendra toujours au résultat d'une façon directe.

Règles relatives aux droites conjuguées ou perpendiculaires.

45. Pour compléter l'exposition de la méthode des équipollences, il me reste à expliquer deux autres artifices, ou plutôt deux autres notations. Nous avons vu, au n° 40, l'utilité qu'il y a à exprimer par une seule équipollence la similitude de deux triangles, laquelle consiste dans la proportionnalité de deux côtés et dans l'égalité des angles compris; cela n'eût pas été possible si les deux angles avaient été l'un positif et l'autre né-

gatif, c'est-à-dire si les figures avaient été symétriquement semblables.

Voici un moyen permettant d'étendre les considérations, développées par nous, d'une figure à une autre qui lui soit inversement égale. Une droite ayant la même longueur qu'une droite donnée et la même *inclinaison*, mais de signe contraire (14), sera dite *conjuguée* de la première, et représentée par la caractéristique cj. Ainsi, dans la *fig*. 4, la droite A'B', égale à AB, et d'inclinaison négative égale à l'inclinaison positive de AB, sera désignée sous le nom de *conjuguée* de AB. Nous écrirons

$$A'B' \triangleq cj.AB$$

et aussi

$$cj.A'B' \triangleq AB.$$

On peut supposer que A'B' soit la droite AB qui a tourné autour d'une parallèle à l'*origine* OH *des inclinaisons*, de manière à effectuer une demi-révolution et à revenir dans le plan de la figure.

46. Si l'on suppose qu'une semblable demi-révolution s'exécute pour toute une figure, on obtient évidemment une figure égale à la première, et qui jouit, par suite, des mêmes propriétés. Donc :

Règle V. — *A une équipollence quelconque correspond toujours sa conjuguée, laquelle s'obtient au moyen de la première, en substituant à chaque droite sa conjuguée.*

47. Un exemple éclaircira l'usage de cette règle.

Problème. — *Trouver le sommet commun de deux triangles symétriquement semblables, de bases données* AD, BC (*fig*. 10).

La similitude des deux triangles ADX, BCX est com-

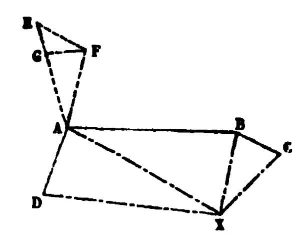
prise dans les deux égalités

$$\text{gr.}(AX:AD)=\text{gr.}(BX:BC),$$

$$\text{angle}\,DAX=-\,\text{angle}\,CBX.$$

L'un des angles est affecté du signe —, parce que les deux angles sont pris en sens contraires. Si, aux côtés de

Fig. 10.



l'un des angles, nous substituons leurs conjugués, cet angle changera de signe, et ainsi nous aurons (15)

$$\text{inc.}\,AX-\text{inc.}\,AD=\text{inc. cj.}\,BX-\text{inc. cj.}\,BC.$$

De cette façon, l'une et l'autre des deux égalités seront comprises dans l'équipollence

$$AX:AD\bumpeq \text{cj.}\,BX:\text{cj.}\,BC.$$

Développant par rapport au point X, on a (10)

$$\text{cj.}\,BC.AX\bumpeq AD\ \text{cj.}\,AX-AD\ \text{cj.}\,AB.$$

D'après la règle V, on aura en même temps cette autre équipollence

$$BC\ \text{cj.}\,AX\bumpeq \text{cj.}\,AD.AX-\text{cj.}\,AD.AB.$$

Entre ces deux équipollences, nous pourrons (18) éliminer cj. AX, et nous aurons, pour déterminer AX,

$$(AD\ \text{cj.}\,AD-BC\ \text{cj.}\,BC)\ AX\bumpeq AD\ (AB\ \text{cj.}\,AD+BC\ \text{cj.}\,AB).$$

Comme nous avons à notre disposition le choix de l'origine des inclinaisons (13), nous en pourrons profiter pour simplifier les constructions. Supposons qu'on prenne pour cette origine la droite AB, de sorte que $AB \bumpeq \mathrm{cj.}AB$, nous aurons

$$(AD\,\mathrm{cj.}AD - BC\,\mathrm{cj.}BC)\,AX \bumpeq AB.AD\,(\mathrm{cj.}AD + BC).$$

Construisons successivement

$$AE \bumpeq \mathrm{cj.}AD,$$

$$EF \bumpeq BC,$$

$$GE \bumpeq BC\,\mathrm{cj.}BC : AD \bumpeq EF\,\mathrm{cj.}EF : \mathrm{cj.}AE,$$

on aura

$$AX : AB \bumpeq (\mathrm{cj.}AD + BC) : (\mathrm{cj.}AD - GE) \bumpeq AF : AG.$$

De tout ce qui précède résulte la solution suivante : on tire AE égale à AD et également inclinée sur AB, mais de l'autre côté, de sorte que

$$\text{angle}\,DAB = \text{angle}\,BAE.$$

Soit EF équipollente à BC ; on forme le triangle FEG symétriquement semblable à AEF, parce qu'on a

$$EG : EF \bumpeq \mathrm{cj.}EF : \mathrm{cj.}EA;$$

enfin on construit ABX directement semblable à AGF.

48. Dans beaucoup de cas (41, 43), on peut constater l'utilité des coefficients numériques servant à accroître ou à diminuer la longueur d'une droite, en lui conservant la même inclinaison ; il serait également commode d'avoir des coefficients pouvant accroître ou diminuer l'inclinaison des droites auxquelles on les appliquerait, sans en altérer la longueur. Le signe $\surd$, ou, à défaut d'un signe spécial, la lettre i, indiquera un accroissement d'incli-

naison d'un angle droit [porté toujours dans le sens HMI (*fig.* 4), vers lequel sont comptées les inclinaisons positives]; ainsi OH, OI, étant égales et perpendiculaires, on écrira

$$\mathrm{OI} \bumpeq \surd\,\mathrm{OH}.$$

Le coefficient $\surd^{u}$ servira à accroître l'inclinaison d'une droite de u angles droits, u étant un nombre entier ou fractionnaire. Par suite, le coefficient $\surd^{4}$ ne produira aucun effet, c'est-à-dire que nous pourrons écrire $\surd^{4} \bumpeq 1$; $\surd^{2}$ change le sens de la droite; par exemple, $\surd^{2}\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{OL}$, ou $\surd^{2} \bumpeq -1$. Ainsi $\surd$ représente ce qui se désigne en Algèbre par $\sqrt{-1}$, et s'énonce *racine de moins un*. Par contraction, nous donnerons au signe $\surd$ le nom de *ramun*. Le plus souvent, au lieu de $\surd^{u}$, nous écrirons ε^{u}, auquel cas l'angle u, au lieu d'être rapporté à l'angle droit comme unité, doit être considéré comme étant la longueur de l'arc correspondant de rayon 1. Les analystes verront que ε répond à leur $e^{\sqrt{-1}}$.

49. De même qu'un nombre, au lieu d'être appliqué comme coefficient à une droite, peut être considéré seul, et représente alors une longueur parallèle à l'origine des inclinaisons; de même aussi, le ramun, élevé à une puissance, peut-être considéré en lui-même comme indiquant une longueur égale à l'unité, dont l'inclinaison est marquée par l'exposant. Il en résulte que $z\,\surd^{u}$ représente une droite égale à z fois l'unité de longueur, et qui est inclinée de u droits sur l'origine des inclinaisons.

50. Comme complément de cette exposition des principes de la méthode des équipollences, nous énoncerons encore les règles suivantes, relatives au ramun et aux droites conjuguées; ces règles sont des conséquences im-

médiates des définitions. Lorsqu'on aura à multiplier $\sqrt{}^{u}$ par $\sqrt{}^{v}$, on obtiendra $\sqrt{}^{u+v}$, parce que, pour former un produit (16), il faut ajouter les inclinaisons u, v. Le produit de $\sqrt{}$ par $\sqrt{}$ donnera $\sqrt{}^{2}$ ou le coefficient -1; en divisant l'unité par $\sqrt{}$, on aura $-\sqrt{}$, ... Donc :

Règle VI. — *Le ramun se calcule précisément comme se calcule en Algèbre l'imaginaire* $\sqrt{-1}$.

51. Règle VII. — *Pour former la conjuguée* (46) *d'une expression quelconque contenant le ramun, il faut changer les signes de tous les exposants de* $\sqrt{}$.

Ainsi la conjuguée de $\sqrt{}^{u}\mathrm{AB}$ est $\sqrt{}^{-u}\,\mathrm{cj.AB}$; celle de $z\sqrt{}^{u}$ est $z\sqrt{}^{-u}$; celle de $\sqrt{}$ est $\sqrt{}^{-1} = -\sqrt{}$.

52. Règle VIII. — *Le produit de deux droites, ou, plus généralement, de deux expressions conjuguées entre elles, a une inclinaison nulle et une grandeur égale au carré de la grandeur de chacune des deux droites ou des deux expressions.*

En effet, les deux expressions conjuguées ont des grandeurs égales et des inclinaisons égales, mais de signes contraires; et, pour faire le produit, il faut multiplier les grandeurs (16) et ajouter les inclinaisons. Ainsi

$$\mathrm{AB}\,\mathrm{cj.BA} \triangleq (\mathrm{gr.AB})^2;$$

semblablement,

$$z\sqrt{}^{u} \triangleq a + b\sqrt{}$$

multipliée par l'expression conjuguée

$$z\sqrt{}^{-u} \triangleq a - b\sqrt{}$$

donne

$$z^2 = a^2 + b^2,$$

ce qui exprime le théorème de Pythagore.

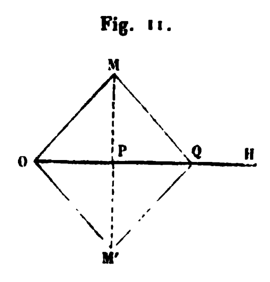
53. Règle IX. — *Une droite, divisée par sa conjuguée, est équipollente au ramun élevé à une puissance égale au double de l'inclinaison de la droite.*

C'est-à-dire que

$$z\sqrt{}^{u} : z\sqrt{}^{-u} \bumpeq \sqrt{}^{2u}.$$

54. Règle X. — *La somme géométrique d'une droite et de sa conjuguée a une inclinaison nulle et une grandeur double de la projection de la droite sur l'origine des inclinaisons, ou égale au double produit de la grandeur de la droite par le cosinus de son inclinaison.*

Fig. 11.



En effet (*fig.* 11), si $OQ \bumpeq OM + cj.OM$, on aura aussi, d'après la règle V,

$$cj.OQ \bumpeq cj.OM + OM \bumpeq OQ;$$

par suite, OQ, étant équipollente à sa propre conjuguée, a une inclinaison nulle.

De plus, si OP a une inclinaison nulle, et si PM a une inclinaison d'un droit, on aura

$$cj.OP \bumpeq OP, \quad cj.PM \bumpeq PM' \bumpeq - PM,$$

et les équipollences

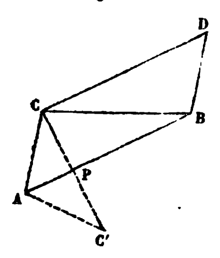
$$OM \bumpeq OP + PM, \quad cj.OM \bumpeq OP - PM$$

donneront

$$OM + cj.OM \triangleq 2OP.$$

55. Si nous voulons déterminer la projection de AC sur AB (*fig.* 12), nous remarquerons que la droite AC′

Fig. 12.



(égale à AC et formant avec AB l'angle BAC′ égal à BAC, mais de signe contraire) est donnée par

$$AC' \triangleq cj.AC.AB : cj.AB,$$

puisque cette équipollence équivaut à

$$gr.AC' = gr.AC$$

et à

$$inc.AC' = inc.cj.AC + inc.AB - inc.cj.AB$$
$$= - inc.AC + inc.AB + inc.AB = 2 inc.AB - inc.AC.$$

On a par suite

$$2AP \triangleq AC + AC' \triangleq AC + cj.AC.AB : cj.AB.$$

56. Règle XI. — *La somme géométrique d'une droite, et de sa conjuguée prise avec le signe moins, a une inclinaison d'un droit, et est égale au double de la projection de la droite sur une autre, ayant une inclinaison d'un droit, ou au double produit de la grandeur de la droite par le sinus de son inclinaison.*

En effet, dans la *fig.* 11, il est évident que

$$\mathrm{M'M} \bumpeq \mathrm{OM} - \mathrm{cj.OM} \bumpeq 2\,\mathrm{PM}.$$

Dans la *fig.* 12, nous aurons

$$2\,\mathrm{PC} \bumpeq \mathrm{AC} - \mathrm{AC'} \bumpeq \mathrm{AC} - \mathrm{cj.AC.AB} : \mathrm{cj.AB}.$$

57. En multipliant (*fig.* 12) gr.PC par gr.AB, on obtient un nombre qui, par rapport à l'unité de surface connue, exprime l'aire du parallélogramme ABDC. Donc

$$2\,\mathrm{PC}\ \mathrm{cj.AB} \bumpeq \mathrm{AC}\ \mathrm{cj.AB} - \mathrm{cj.AC.AB}$$

a une grandeur double du parallélogramme donné; comme les deux termes AC cj. AB, cj. AC. AB sont conjugués entre eux, nous ferons disparaître l'inclinaison d'un droit qui s'applique (56) à leur différence, en divisant par le ramun, et nous aurons l'aire

$$\mathrm{ABDC} \bumpeq \frac{1}{2\sqrt{}}(\mathrm{AC}\,\mathrm{cj.AB} - \mathrm{AB}\,\mathrm{cj.AC}) \bumpeq \frac{\sqrt{}}{2}(\mathrm{AB}\,\mathrm{cj.AC} - \mathrm{AC}\,\mathrm{cj.AB}).$$

De là :

RÈGLE XII. — *L'aire d'un triangle* ABC *est exprimée par*

$$\frac{\sqrt{}}{4}(\mathrm{AB}\,\mathrm{cj.AC} - \mathrm{cj.AB.AC}),$$

et aussi par

$$\frac{\sqrt{}}{4}(\mathrm{AB}\,\mathrm{cj.BC} - \mathrm{cj.AB.BC}),$$

puisque, d'après la règle I, on établit l'identité

$$\mathrm{AB}\,\mathrm{cj.BC} - \mathrm{cj.AB.BC} \bumpeq \mathrm{AB}\,\mathrm{cj.}(\mathrm{AC} - \mathrm{AB}) - (\mathrm{AC} - \mathrm{AB})\,\mathrm{cj.AB}$$
$$\bumpeq \mathrm{AB}\,\mathrm{cj.AC} - \mathrm{AC}\,\mathrm{cj.AB}.$$

On remarquera que, par la permutation des lettres B, C,

l'aire du triangle se trouve exprimée par

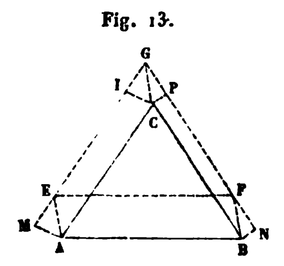
$$\frac{\surd}{4}\,(\mathrm{AC\;cj.AB} - \mathrm{cj.AC.AB}),$$

c'est-à-dire, dans le cas de la figure, par un nombre négatif égal à — aire ABC. Ce fait, loin d'être un inconvénient de la méthode, en constitue l'un des grands avantages; il permet d'éviter les erreurs que l'on pourrait commettre dans l'addition des aires, si l'on ne considérait pas assez attentivement les diverses positions que peuvent prendre les éléments d'une figure.

On démontre facilement que les aires ABC, BCA, CAB sont identiques, même quant à leurs signes.

58. Faisons deux applications de cette dernière règle de la méthode des équipollences. Si l'on décrit, sur l'un des côtés d'un triangle ABC (*fig.* 13), un parallélo-

Fig. 13.



gramme ABFE, et que l'on construise aussi avec le côté $\mathrm{CG} \bumpeq \mathrm{AE}$ les deux parallélogrammes ACGE, BFGC, on aura

$$\mathrm{ABFE} \bumpeq \frac{\surd}{2}\,(\mathrm{AB\;cj.AE} - \mathrm{AE\;cj.AB}),$$

$$\mathrm{ACGE} \bumpeq \frac{\surd}{2}\,(\mathrm{AC\;cj.AE} - \mathrm{AE\;cj.AC}),$$

$$\mathrm{BFGC} \bumpeq \frac{\surd}{2}\,(\mathrm{AE\;cj.BC} - \mathrm{BC\;cj.AE}),$$

en introduisant AE à la place de $BF \triangleq CG \triangleq AE$.

Si l'on se rappelle que

$$BC \triangleq AC - AB,$$
$$\text{cj.}BC \triangleq \text{cj.}AC - \text{cj.}AB,$$

on voit que ces trois équipollences donnent

$$ABFE = ACGE + BFGC.$$

Aux parallélogrammes ACGE, BFGC, nous pouvons substituer les deux autres ACLM, BNPC compris entre les mêmes parallèles.

En effet, de

$$AE \triangleq AM + ME \triangleq AM + nAC,$$

on tire

$$AC\,\text{cj.}AE - AE\,\text{cj.}AC \triangleq AC\,\text{cj.}AM - AM\,\text{cj.}AC.$$

Par suite, la somme des aires des parallélogrammes ACLM, BNPC est égale à celle de ABFE, dont les deux côtés AE, BF sont équipollents à CG.

Ceci constitue un théorème de Clairaut, comprenant, comme cas particulier, la démonstration du théorème de Pythagore, donnée par Euclide dans sa 47[e] proposition. Il suffit, pour cela, de supposer que le triangle ACB soit rectangle en C, et que ACLM, BNPC soient deux carrés construits sur les côtés.

59. Au moyen des règles XII et I, on peut donner diverses formes à l'expression de l'aire d'un polygone. Ainsi, pour le quadrilatère, on a

$$ABCD \triangleq ABC + ACD$$
$$\triangleq \frac{\sqrt{}}{4}(AB\,\text{cj.}AC - AC\,\text{cj.}AB + AC\,\text{cj.}AD - AD\,\text{cj.}AC).$$

Réduisant toutes les droites aux trois AB, AC, BD, la droite AB s'élimine, et l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ABCD} &\triangleq \frac{\surd}{2}\,[\mathrm{AB\,cj.AC} - \mathrm{AC\,cj.AB} + \mathrm{AC}(\mathrm{cj.AB} + \mathrm{cj.BD}) \\ &\qquad - \mathrm{cj.AC}(\mathrm{AB} + \mathrm{BD})] \\ &\triangleq \frac{\surd}{4}\,(\mathrm{AC\,cj.BD} - \mathrm{cj.AC.BD}).\end{aligned}$$

Par suite : *Un quadrilatère* ABCD *est équivalent au triangle ayant deux côtés équipollents aux diagonales* AC, BD.

60. Pour le pentagone ABCDE (et l'on peut en dire autant pour tout autre polygone), on trouve, en exprimant (10) toutes les diagonales au moyen des côtés,

$$\begin{aligned}\mathrm{AB\,cj.BC} + \mathrm{AC\,cj.CD} + \mathrm{AD\,cj.DE} &\triangleq \mathrm{AB\,cj.BC} + \mathrm{AB\,cj.CD} \\ &\quad + \mathrm{AB\,cj.DE} + \mathrm{BC\,cj.CD} \\ &\quad + \mathrm{BC\,cj.DE} + \mathrm{CD\,cj.DE},\end{aligned}$$

et, par suite, la règle XII nous montre que :

L'aire ABCDE *est la somme de tous les triangles ayant deux côtés équipollents à deux des côtés* AB, BC, CD, DE *du polygone* (*le côté* EA *étant omis*).

(*A suivre.*)

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS INFINITÉSIMAUX RELATIFS AUX LIGNES A DOUBLE COURBURE

(suite et fin, voir même tome, p. 161);

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

VIII. Nous allons établir plusieurs propriétés, et calculer quelques éléments qui se rapportent à l'arc infini-

ment petit OM, outre les théorèmes démontrés aux paragraphes IV et V. Nous supposerons que les valeurs de x, y, z aient été explicitées à l'aide du tableau précédent.

La différence entre l'arc OM et sa corde est

$$s - \sqrt{x^2+y^2+z^2} = s - \sqrt{s^2 - \frac{1}{3}\frac{s^4}{R^2} + \ldots + \frac{1}{4}\frac{s^4}{R^2} + \ldots}$$
$$= \frac{s^3}{24R^2} + \ldots;$$

elle a pour limite le cube de l'arc divisé par 24 fois le carré du rayon de courbure.

L'angle de la corde OM avec la tangente en O peut être mesuré par $\frac{y}{s} = \frac{s}{2R} + \ldots$; il est, à la limite, égal à la moitié de l'angle de contingence.

L'angle du plan des xy et du plan mené par la tangente en O et le point M a pour mesure $\lim \frac{z}{y} = \frac{s}{3r}$; il est le tiers de l'angle de torsion. Il en résulte que, si l'on considère la projection de la courbe sur le plan des yz, l'angle de la corde avec la tangente en O est le tiers et non la moitié de l'angle de contingence.

Les équations de la tangente en M peuvent s'écrire

$$\frac{X - s}{1 - \frac{s^2}{2R^2}} = \frac{Y - \frac{s^2}{2R} + \ldots}{\frac{s}{R} - \frac{s^2}{2R^2}\frac{dR}{ds}} = \frac{Z - \frac{s^3}{6Rr} + \ldots}{\frac{s^2}{2Rr} + \ldots}.$$

Sa plus courte distance à Ox a pour équations (I) à la limite

$$Y + \frac{s}{2r}Z = 0, \quad X = \frac{s}{2};$$

sa longueur est (I) $\frac{s^3}{12Rr}$; enfin son angle avec l'axe du plan osculateur est égal au demi-angle de torsion; ces théorèmes ont été énoncés par M. Ossian Bonnet.

La normale principale en M a pour équations

$$\frac{X-s}{-\frac{s}{R}} = Y - \frac{s^2}{2R} = \frac{Z-\frac{s^3}{6Rr}}{\frac{s}{r}};$$

on a

$$\cos\lambda = -\frac{s}{R},\quad \cos\nu = \frac{s}{r};$$

les angles que cette normale fait avec les plans des yz et des xy sont complémentaires de λ et de ν, et égaux respectivement aux angles de contingence et de torsion. L'angle des normales en O et en M peut être mesuré par son sinus

$$\sin\mu = \sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\nu} = \frac{s}{Rr}\sqrt{R^2+r^2}.$$

La perpendiculaire commune aux deux normales a pour équations

$$\frac{X}{R} - \frac{Z}{r} = 0,\quad Y = \frac{Rr^2}{R^2+r^2},$$

et pour longueur $\frac{Rs}{\sqrt{R^2+r^2}}$. Son angle Oz, égal à celui du plan osculateur et du plan parallèle aux deux normales, a pour tangente $\frac{r}{R}$. Les normales principales forment une surface gauche, sur laquelle le paramètre de distribution le long de la génératrice issue du point O est $\frac{R^2+r^2}{R^2r}$.

La courbe gauche a même cercle de courbure que sa

projection sur le plan des xy; car dans chacune la distance du point infiniment voisin de O à la tangente en O et la longueur de l'arc compris ne diffèrent que de quantités négligeables. La distance de M à ce cercle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés le z du point M et la distance de sa projection au cercle, c'est-à-dire la puissance du point divisée par le diamètre. Cette distance est donc

$$\sqrt{z^2 + \frac{1}{4R^2}[x^2 + (y - R)^2 - R^2]^2} = \frac{s^3}{6R^2 r}\sqrt{R^2 + r^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2}.$$

IX. L'équation générale du plan normal est, en ordonnant,

$$X + (Y - R)\frac{s}{R} - \left(X + \frac{dR}{ds}Y - \frac{R}{r}Z\right)\frac{s^2}{2R^2} + \ldots = 0.$$

Le point de rencontre du plan normal en O et des deux infiniment voisins se détermine en annulant le terme indépendant de s, les coefficients de s et de s^2; il a pour coordonnées

$$x_1 = 0, \quad y_1 = R, \quad z_1 = r\frac{dR}{ds}.$$

C'est un point de l'arête de rebroussement (A) de la surface polaire enveloppe des plans normaux à la courbe donnée. Si de ce point comme centre on décrit une sphère passant en O, son rayon sera

$$\rho = \sqrt{R^2 + r^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2};$$

elle coupe le plan des xy suivant le cercle osculateur, et je dis qu'elle-même est osculatrice à la courbe, car elle passe à une distance infiniment petite du quatrième ordre du point M. En effet, cette distance est sensiblement égale

à la puissance du point M relative à la sphère, divisée par son diamètre : c'est donc

$$\delta = \frac{1}{2\rho}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-\rho^2]$$

$$= -\frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{12R^2}+2Rb_4+2r\frac{dR}{ds}c_4\right)s^4+\ldots$$

$$= \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{Rr}\frac{dR}{ds}\frac{dr}{ds}+\frac{1}{R}\frac{d^2R}{ds^2}\right)\frac{s^4}{24\rho} = \frac{1}{24}\frac{\frac{d\rho}{ds}}{\frac{dR}{ds}}\frac{s^4}{Rr^2}.$$

X. Le rayon de la sphère osculatrice en un point quelconque aura la même expression, ou, en vertu de l'équation (10),

$$\rho^2 = R^2 + r^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = R^4\sum\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2 - r^2.$$

L'examen de ce qui a lieu au point O montre, par une coïncidence géométrique des plus simples, que le centre de cette sphère a pour coordonnées

$$x_2 = x + R\cos\lambda + r\frac{dR}{ds}\cos\xi, \ldots.$$

Pour le point infiniment voisin de O, il est bien facile de trouver qu'en négligeant s^2 on a

$$x_2 = 0, \quad y_2 = R_0, \quad z_2 = r_0\frac{dR_0}{ds} + \frac{\rho_0}{r_0}\frac{d\rho_0}{dR_0}s.$$

L'arc $\omega\mu$ de l'arête de rebroussement (A) correspondant à OM est donc tangent à l'axe du cercle osculateur, et a pour longueur

$$d\sigma = \frac{\rho_0}{r_0}\frac{d\rho_0}{dR_0}s.$$

Si l'on rapproche cette valeur de celle que j'ai donnée

pour δ, on retrouve la formule indiquée par M. Ruchonnet

$$\delta = \frac{s^3 d\sigma}{24 R r \rho}.$$

Les tangentes à l'arête (A) étant les axes des cercles osculateurs de la courbe donnée, l'angle de contingence de $\omega\mu$ égale l'angle de torsion de OM. En tenant compte des termes en s^2 dans les valeurs de x_1, y_1, z_1, on verrait que le plan osculateur de (A) en ω est le plan normal en O; mais cela résulte aussi de ce qu'il est parallèle aux axes des plans osculateurs en O et M, et que ces deux plans passent par la tangente OX. Il s'ensuit que l'angle de torsion de $\omega\mu$ est égal à l'angle des plans normaux en O et en M, ou à l'angle de contingence de OM. Les rayons de première et de deuxième courbure de (A) en ω sont respectivement

$$\rho \frac{d\rho}{dR}, \quad \frac{R\rho}{r} \frac{d\rho}{dR}.$$

J'ai cru devoir indiquer très-rapidement les résultats connus que j'ai rencontrés; mais on peut voir combien la méthode précédente est régulière et facile, et propre à l'étude de toutes les propriétés qui ne dépendent que des rayons de courbure des lignes de l'espace.

SCOLIES POUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. S. REALIS,
Ingénieur à Turin.

LEMME I. — *Tout nombre entier de l'une des formes*

$$8n + 3, \quad 4n + 1, \quad 4n + 2$$

est la somme de trois carrés.

Pour la démonstration de ce lemme, qui contient trois propositions distinctes, nous renvoyons à la *Théorie des nombres* de Legendre (3ᵉ édition, t. I, p. 393 et suiv.).

Les propositions énoncées, ainsi que les conséquences que nous allons en déduire, peuvent être considérées comme autant de scolies au théorème général énoncé par Bachet de Méziriac et par Fermat, et démontré par Lagrange, que *tout nombre entier est la somme de quatre carrés.*

Nous n'avons pas besoin d'ajouter que, dans les énoncés, on regarde zéro comme un carré dont la racine est nulle.

Théorème I. — *Tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont les racines, prises avec des signes convenables, ont une somme algébrique égale à l'unité.*

D'après le lemme ci-dessus, et en observant que les trois carrés dans lesquels se décompose un nombre de la forme $8n+3$ ne peuvent être qu'impairs, nous pouvons poser

$$(1) \qquad 8n+3=(2a-1)^2+(2b-1)^2+(2c-1)^2,$$

et nous serons assurés que, pour toute valeur entière et positive de n, on peut assigner des valeurs entières de a, b, c satisfaisant à la formule (1).

Cela posé, nous observerons que la relation (1) entre n, a, b, c est équivalente à l'une quelconque des suivantes :

$$(2) \qquad 2n+1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

$$(3) \qquad 2n+1=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\alpha = \frac{-a+b-c+1}{2},$$

$$\beta = \frac{-a-b+c+1}{2},$$

$$\gamma = \frac{a-b-c+1}{2},$$

$$\delta = \frac{a+b+c-1}{2},$$

et

$$\alpha' = \frac{-a+b+c}{2},$$

$$\beta' = \frac{a-b+c}{2},$$

$$\gamma' = \frac{a+b-c}{2},$$

$$\delta' = \frac{-a-b-c+2}{2};$$

ce qui se trouve vérifié par l'identité des valeurs de n tirées des formules considérées.

Maintenant, dans la formule (1), il peut arriver deux cas, selon que la somme $a+b+c$ est un nombre impair ou un nombre pair. Dans le premier cas, les nombres α, β, γ, δ sont entiers; dans l'autre cas, les nombres α', β', γ', δ' sont entiers; on a d'ailleurs

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$$

pour la formule (2), et

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=1$$

pour la formule (3). Dans les deux cas, le nombre $2n+1$ est décomposé en quatre carrés, dont les racines sont des

entiers donnant une somme algébrique égale à l'unité; ainsi le théorème énoncé se trouve démontré.

Et comme de l'une quelconque des formules (2), (3) on remonte de suite à la formule (1), on voit que, si l'on avait une démonstration directe du théorème I, celle du lemme I, en ce qui concerne la décomposition du nombre $8n+3$ en trois carrés, s'ensuivrait immédiatement.

Ajoutons, en passant, que la valeur de n tirée de l'une quelconque des équations (1), (2), (3) étant

$$n = \frac{a^2 - a}{2} + \frac{b^2 - b}{2} + \frac{c^2 - c}{2},$$

il en résulte le théorème de Fermat sur la décomposition d'un entier en trois nombres triangulaires.

Théorème II. — *Tout nombre double d'un impair est la somme de quatre carrés dont les racines ont une somme algébrique égale à zéro.*

Un corollaire immédiat de la troisième partie du lemme I établit que *tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont égaux.*

On peut donc poser

$$2n + 1 = a^2 + b^2 + c^2,$$

a, b, c étant des entiers.

On déduit de là

$$4n + 2 = (a+c)^2 + (-a+c)^2 + (-b-c)^2 + (b-c)^2,$$

où

$$(a+c) + (-a+c) + (-b-c) + (b-c) = 0;$$

ce qui démontre la proposition.

Réciproquement, de ce qu'un nombre double d'un impair se décompose en quatre carrés dont les racines

fournissent une somme algébrique nulle, il s'ensuit que l'impair considéré est la somme de quatre carrés dont deux sont égaux.

Théorème III. — *Tout nombre double d'un impair est la somme de quatre carrés dont les racines ont une somme algébrique égale à* 2.

Quel que soit l'entier positif n, on peut satisfaire à l'équation

$$(4) \qquad 4n+1=(2a-1)^2+4b^2+4c^2$$

par des valeurs entières de a, b, c; c'est ce que nous apprend le lemme I, où il est à observer que, des trois carrés dans lesquels se décompose le nombre $4n+1$, un seul peut et doit être impair.

Mais on s'assure à l'instant que la relation (4) est équivalente à la suivante :

$$4n+2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

où

$$\alpha=a+b+c,$$
$$\beta=a-b-c,$$
$$\gamma=-a+b-c+1,$$
$$\delta=-a-b+c+1,$$

et

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2.$$

De là le théorème énoncé.

Réciproquement, de ce théorème, supposé établi *a priori*, découle la conséquence que le nombre $4n+1$ est la somme de trois carrés.

Remarque. — On déduit aussi de (4)

$$2n+1=2(a^2+b^2+c^2)-2a+1,$$

ou

$$2n+1=(a-1)^2+a^2+(b+c)^2+(b-c)^2.$$

On voit par là que *tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont consécutifs*, conformément à l'énoncé de la question 1061 des *Nouvelles Annales*, proposée par M. Lionnet (2e série, t. XI, p. 96).

En outre, la valeur de n fournie par les relations posées étant

$$n = (a^2 - a) + b^2 + c^2,$$

il en résulte d'abord que *tout nombre entier est la somme de deux carrés et du double d'un nombre triangulaire.* Puis, si n est un nombre pair $2n'$, on obtient

$$n' = \frac{a^2 - a}{2} + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

$\frac{b+c}{2}$ et $\frac{b-c}{2}$ étant entiers (puisque, en ce cas, b et c sont nécessairement tous les deux pairs ou tous les deux impairs). Ce résultat fait reconnaître que *tout nombre entier est la somme de deux carrés et d'un nombre triangulaire*, et fournit ainsi la solution de la question 1060 proposée par M. Lionnet.

Corollaires. — 1° *Tout nombre entier de la forme* $(2n+1)2^{2m}$ *est la somme de quatre carrés dont les racines ont une somme algébrique égale à* 2^m;

2° *Tout nombre pair de la forme* $(2n+1)2^{2m+1}$ *est la somme de quatre carrés dont les racines ont une somme algébrique égale à zéro;*

3° *Tout nombre pair de la forme* $(2n+1)2^{2m+1}$ *est la somme de quatre carrés dont les racines ont une somme algébrique égale à* 2^{m+1}.

Faisant $m = 0$, on a les trois théorèmes qui viennent d'être démontrés.

Lemme II. — *Tout nombre double d'un impair est la somme de quatre carrés dont l'un peut être choisi arbitrairement parmi les carrés inférieurs à ce nombre.*

C'est une conséquence du lemme I.

Soit $4n+2$ le nombre considéré, et désignons par k^2 un carré moindre que ce nombre. Si k est pair, le nombre $4n+2-k^2$ est de la forme $4p+2$, et se décompose en trois carrés. On satisfait donc à l'équation

$$4n+2-k^2 = a^2+b^2+c^2$$

en nombres entiers a, b, c, et l'on a ainsi

$$(5) \qquad 4n+2 = a^2+b^2+c^2+k^2,$$

où k^2 peut être l'un quelconque des carrés pairs qui précèdent le nombre $4n+2$, et où il est bon d'observer que a, b, c représentent nécessairement deux nombres impairs et un pair.

Si k est impair, le nombre $4n+2-k^2$ est de la forme $4p+1$, et se décompose en trois carrés. Une équation telle que (5) est donc possible en nombres entiers a, b, c, quel que soit le carré impair $k^2 < 4n+2$. En ce cas, a, b, c ne peuvent être que deux pairs et un impair.

Théorème IV. — *Tout nombre double d'un impair est la somme de quatre carrés qui peuvent être déterminés de manière que la somme algébrique de leurs racines égale tel nombre que l'on voudra de la suite*

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ldots,\quad 2\mu-2,\quad 2\mu,$$

μ^2 étant le plus grand carré inférieur au nombre proposé.

Cette proposition, dont les théorèmes II et III sont des cas particuliers, se démontre comme il suit :

Soient $4n+2$ le nombre proposé, et k^2 un carré inférieur à ce nombre.

D'après le lemme II, une équation telle que (5), où n et k sont fixés d'avance, admet toujours une solution en nombres entiers a, b, c.

Nous pouvons remplacer cette équation par la suivante :

$$(6) \qquad 4n + 2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

en donnant à α, β, γ, δ les valeurs

$$\alpha = \frac{a + b + c + k}{2},$$

$$\beta = \frac{-a + b - c + k}{2},$$

$$\gamma = \frac{-a - b + c + k}{2},$$

$$\delta = \frac{a - b - c + k}{2};$$

car on aura, par identité,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = a^2 + b^2 + c^2 + k^2.$$

Si k est pair, a, b, c représentent deux nombres impairs et un pair, ainsi qu'on l'a observé plus haut, et les nombres α, β, γ, δ sont entiers.

Si k est impair, a, b, c sont deux nombres pairs et un impair, et α, β, γ, δ sont encore entiers.

On a d'ailleurs

$$(7) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k.$$

Ces résultats (6) et (7), où k est la racine de l'un quelconque des carrés qui se trouvent au-dessous du nombre proposé $4n + 2$, établissent le théorème énoncé.

Corollaire. — *Tout nombre impair est la somme de quatre carrés qui peuvent être déterminés de manière que les racines de deux d'entre eux aient pour différence tel nombre que l'on voudra de la suite*

$$0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3, \ldots,\ \mu - 1,\ \mu,$$

μ^2 étant le plus grand carré inférieur au double du nombre proposé.

Par le théorème IV, l'équation

$$(6) \qquad 4n + 2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

est résoluble en nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (deux pairs, α, γ; deux impairs, β, δ), qui satisfont à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k,$$

k étant la racine d'un carré arbitraire, inférieur à $4n + 2$.

En posant

$$A = \frac{\alpha - \gamma}{2}, \quad B = \frac{\beta - \delta}{2}, \quad C = \frac{-\beta - \delta}{2}, \quad D = \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

d'où

$$D - C = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = k,$$

l'équation (6) donne

$$2n + 1 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

c'est-à-dire

$$2n + 1 = A^2 + B^2 + C^2 + (C + K)^2;$$

ce qui prouve la proposition.

Dans le cas de $k = 0$, l'impair $2n + 1$ se trouve décomposé en quatre carrés dont deux sont égaux. Pour $k = 1$, on a la décomposition considérée dans la question 1061 déjà citée.

Théorème V. — *Tout nombre impair est la somme de quatre carrés qui peuvent être déterminés de manière que la somme algébrique de leurs racines égale tel nombre que l'on voudra de la suite*

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2\mu - 1, \quad 2\mu + 1,$$

$(2\mu + 1)^2$ étant le plus grand carré impair au-dessous du quadruple du nombre proposé.

Le mode de démonstration employé pour le théorème I s'applique comme il suit à la proposition généralisée qu'on vient d'énoncer :

Soient $2n+1$ le nombre proposé, et k^2 un carré impair compris entre zéro et $4(2n+1)$.

Le nombre $8n+4-k^2$, étant de la forme $8p+3$, se décompose en trois carrés impairs que nous représenterons par $(2a-k)^2$, $(2b-k)^2$, $(2c-k)^2$; en sorte que l'équation

$$(8) \quad 8n+4-k^2=(2a-k)^2+(2b-k)^2+(2c-k)^2,$$

dans laquelle n et k sont fixés d'avance, subsistera pour des valeurs entières de a, b, c.

Cette équation donne

$$2n+1=\left(\frac{2a-k}{2}\right)^2+\left(\frac{2b-k}{2}\right)^2+\left(\frac{2c-k}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2,$$

et nous fournit ainsi une décomposition du nombre proposé en quatre carrés fractionnaires.

Mais cette relation est identiquement équivalente à l'une quelconque des suivantes :

$$(9) \qquad 2n+1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

$$(10) \qquad 2n+1=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\alpha=\frac{a+b+c-k}{2},$$

$$\beta=\frac{-a+b-c+k}{2},$$

$$\gamma=\frac{-a-b+c+k}{2},$$

$$\delta=\frac{a-b-c+k}{2},$$

et

$$\alpha' = \frac{a-b+c}{2},$$

$$\beta' = \frac{a+b-c}{2},$$

$$\gamma' = \frac{-a+b+c}{2},$$

$$\delta' = \frac{-a-b-c+2k}{2},$$

et où l'on a

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=k,$$

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=k..$$

Maintenant, si $a+b+c$ est un nombre impair, α, β, γ, δ sont entiers, et la décomposition (9) vérifie le théorème. Si $a+b+c$ est un nombre pair, α', β', γ', δ' sont entiers, et le théorème est vérifié par la décomposition (10).

Note. — La formule (8) montre que *tout nombre quadruple d'un impair est la somme de quatre carrés impairs, dont l'un peut être choisi arbitrairement parmi ceux qui sont au-dessous du nombre proposé.*

On a vu plus haut (lemme II) une proposition analogue, touchant les nombres doubles d'un impair.

A ces propositions, il est bon d'ajouter les deux suivantes, qui se rapportent à la décomposition des nombres impairs :

Tout nombre impair de la forme $4n+1$ est la somme de quatre carrés dont l'un peut être choisi arbitrairement parmi les carrés pairs inférieurs à ce nombre.

Tout nombre impair de la forme $4n+3$ est la somme de quatre carrés dont l'un peut être choisi arbitrairement parmi les carrés impairs inférieurs à ce nombre.

En effet, l'entier positif $4n+1-4h^2$ est de la forme $4p+1$, et se décompose en trois carrés (dont deux pairs et un impair), et l'entier positif $4n+3-(2h'+1)^2$ est de la forme $4p+2$, et se décompose de même en trois carrés (dont deux impairs et un pair). De là résultent deux équations, telles que

$$4n+1 = 4a^2+4b^2+(2c+1)^2+4h^2,$$
$$4n+3 = 4a'^2+(2b'+1)^2+(2c'+1)^2+(2h'+1)^2,$$

résolubles en nombres entiers a, b, c et a', b', c' respectivement, n, h et h' étant fixés d'avance.

SOLUTION DE TROIS QUESTIONS

Proposées par M. Gilbert, Professeur à l'Université de Louvain;

PAR M. CHARLES RUCHONNET.

Je commence par la troisième question, pour pouvoir en utiliser le résultat dans la solution de l'une des deux autres.

Soit m' la projection de M' sur le plan osculateur en M; on sait que

$$M'm' = \frac{1}{6}\frac{ds^3}{RT}.$$

Je fais glisser sur la courbe donnée une droite qui reste constamment perpendiculaire au plan osculateur en M, et le cylindre que cette droite engendre, je le développe sur le plan rectifiant en M. Les points M', m' viennent prendre sur ce plan des positions N et n. Le point n est situé sur la tangente en M à la courbe, et l'on a

$$(1) \qquad Nn = M'm' = \frac{1}{6}\frac{ds^3}{RT}.$$

Comme le développement du cylindre n'a point altéré les longueurs des arcs MM', Mm', on a

(2) $$\text{arc}\,MN = \text{arc}\,MM', \quad Mn = \text{arc}\,Mm'.$$

Posons

(3) $$Mn = a.$$

Rapportons la courbe MN à deux axes rectangulaires, prenant le point M pour origine, la tangente Mn pour axe des x, et la normale principale en M pour axe des y. Comme Nn est du troisième ordre (2), l'équation de la courbe MN est, en désignant par A une constante,

(4) $y = Ax^3 +$ des termes en x de degrés supérieurs à 3;

et l'on tire de là

$$\frac{dy}{dx} = 3Ax^2 + \text{ des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } 2.$$

On a

$$\text{arc}\,MN = \int_0^a dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_0^a dx\sqrt{1 + 9A^2x^4}$$
$$= \int_0^a dx\left(1 + \frac{9}{2}A^2x^4\right),$$

d'où

$$\text{arc}\,MN = a + \frac{9}{10}A^2a^5.$$

Comme MM' ou ds et a sont égaux en tant que infiniment petits, les équations (1) et (4), rapprochées l'une de l'autre, montrent que A est égal à $\frac{1}{6RT}$; donc

$$\text{arc}\,MN = a + \frac{1}{40}\frac{a^5}{R^2T^2},$$

d'où, en vertu des équations (2) et (3),

$$\text{arc}\,MM' - \text{arc}\,Mm' = \frac{1}{40}\,\frac{a^5}{R^2T^2}.$$

Écrivant dans cette équation ds au lieu de a, on obtient la relation qu'il s'agissait de vérifier.

Je passe à la première question.

Soit toujours m' la projection de M' sur le plan osculateur en M. La projection de $M'M_1$ sur la normale principale en M est égale à la projection de $m'M_1$ sur cette normale; et, comme la direction $m'M_1$ fait avec la normale principale un angle infiniment petit, on peut remplacer la projection de $m'M_1$ par $m'M_1$ lui-même. Or on sait que $m'M_1 = \frac{R'\,ds^3}{6R^2}$, R' représentant la dérivée $\frac{dR}{ds}$, et cette expression est équivalente à $\frac{u\,ds^3}{6R^2T}$, à cause de $u = R'T$.

Fig. 1.

Je prends enfin la deuxième question, et je considère d'abord le cas d'une courbe plane.

Rapportons la courbe à deux axes rectangulaires, en prenant M pour origine, la tangente en M pour axe des x, et la normale pour axe des y. On a, en désignant par A et B deux constantes,

(I) $y = Ax^2 + Bx^3 +$ des termes en x de degrés supérieurs à 3,

d'où

$\frac{dy}{dx} = 2Ax + 3Bx^2 +$ des termes en x de degrés supérieurs à 2.

Soit P (*fig.* 1) le pied de la perpendiculaire abaissée

de M′ sur la tangente en M. Posons MP $= a$; on a

$$\text{arc}\,\text{MM}' = \int_0^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_0^a dx \sqrt{1 + 4\text{A}^2x^2 + 12\,\text{AB}x^3}$$

$$= \int_0^a dx\,(1 + 2\text{A}^2x^2 + 6\,\text{AB}x^3),$$

d'où

(II) $$\text{arc}\,\text{MM}' = a + \frac{2}{3}\text{A}^2a^3 + \frac{3}{2}\text{AB}a^4.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir les expressions de A et de B.

Menons la tangente en M′; soit T le point où elle coupe celle en M. Désignons par ε l'angle des deux tangentes. Pour fixer les idées, supposons que le rayon de courbure aille croissant de M vers M′; alors on a, comme on sait,

$$\text{M}'\text{T} = \frac{1}{2}ds + \frac{1}{12}\varepsilon\, d\text{R},$$

d'où

(III) $$\text{M}'\text{P} = \frac{1}{2}\varepsilon\, ds + \frac{1}{12}\varepsilon^2 d\text{R}.$$

Or l'égalité $\frac{ds}{\varepsilon} = \text{R} + \frac{1}{2}d\text{R}$, qui est vraie au second ordre près, donne, au troisième ordre près,

(IV) $$\varepsilon = \frac{ds}{\text{R}} - \frac{1}{2}\frac{\text{R}'ds^2}{\text{R}^2}.$$

Substituant cette valeur dans (III), il vient

$$\text{M}'\text{P} = \frac{ds^2}{2\text{R}} - \frac{\text{R}'ds^3}{6\text{R}^2}.$$

Comme la différence entre arc MM′ et MP, c'est-à-dire entre ds et a, est du troisième ordre, l'équation précédente reste exacte au quatrième ordre près, si l'on y écrit a au lieu de ds, ce qui donne

$$M'P = \frac{a^2}{2R} - \frac{R'a^3}{6R^2}.$$

Cette équation, rapprochée de (I), montre qu'on a

$$A = \frac{1}{2R}, \quad B = -\frac{R'}{6R^2},$$

et l'équation (II) devient, en substituant ces valeurs,

$$\text{(V)} \qquad \text{arc}\,MM' = a + \frac{1}{6R^2}a^3 - \frac{R'}{8R^3}a^4.$$

Calculons maintenant la corde MM′. Posons

$$\text{angle}\,M'MP = M;$$

on a

$$\text{corde}\,MM' = \frac{a}{\cos M},$$

d'où, au cinquième ordre près,

$$\text{corde}\,MM' = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}M^2}.$$

Puisque nous supposons que le rayon de courbure va croissant de M vers M′, on a, comme on sait,

$$M = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{12}R'\varepsilon^2,$$

d'où, au cinquième ordre près,

$$\text{corde}\,MM' = \frac{a}{1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{24}R'\varepsilon^3} = a\left(1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{24}R'\varepsilon^3\right),$$

d'où, en remplaçant ε par sa valeur (IV),

$$\text{corde MM}' = a\left(1 + \frac{ds^2}{8R^2} - \frac{R'\,ds^3}{12R^3}\right).$$

Remplaçant ds par a, cette égalité reste exacte au cinquième ordre près; il vient

$$\text{corde MM}' = a + \frac{a^3}{8R^2} - \frac{R'\,a^4}{12R^3}.$$

Retranchant cette dernière de (V), on obtient

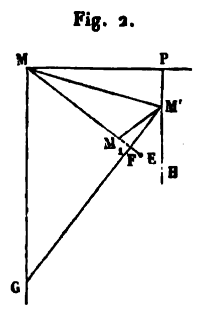
$$\text{arc MM}' - \text{corde MM}' = \frac{a^3}{24R^2} - \frac{R'\,a^4}{24R^3}.$$

Au cinquième ordre près, on peut écrire dans celle-ci ds au lieu de a; donc

$$\text{arc MM}' - \text{corde MM}' = \frac{ds^3}{24R^2} - \frac{R'\,ds^4}{24R^3}.$$

Considérons la différence arc MM_1 — corde MM_1 relative au cercle osculateur; comme, par hypothèse,

Fig. 2.



arc MM_1 = arc MM' = ds, comme R' est nul dans un cercle, et comme R a la même valeur dans la courbe con-

sidérée et dans le cercle osculateur, la précédente égalité donne

$$\text{arc}\,MM_1 - \text{corde}\,MM_1 = \frac{ds^3}{24R^2}.$$

Retranchant l'une de l'autre ces deux équations, il vient

$$\text{corde}\,MM' - \text{corde}\,MM_1 = \frac{R'ds^4}{24R^3}.$$

Sur la corde MM_1 prolongée, prenons $ME = MM'$ (*fig.* 2); on a, d'après la dernière égalité,

$$M_1E = \frac{R'ds^4}{24R^3}.$$

De M' abaissons une perpendiculaire sur MM_1; elle coupe cette droite et la normale en des points F et G. La longueur FE est du cinquième ordre, parce que l'angle $M'MM_1$ est du second, et MM' du premier; on peut donc négliger FE devant M_1E, et écrire

(VI) $$M_1F = \frac{R'ds^4}{24R^3}.$$

Soit $M'H$ le prolongement de PM', qui est parallèle à la normale en M. Désignons par Z la projection de $M'M_1$ sur la tangente MP, ce qui est la grandeur dont il s'agit d'obtenir l'expression; on a

$$Z = M'M_1 \times \text{angle}\,M_1M'H,$$

ou

$$Z = M'M_1(M_1M'F + FM'H).$$

Or $FM'H = M'GM = FMP$, et l'angle FMP est égal à la moitié de l'angle des tangentes au cercle en M et en M_1, et ce dernier est égal, en tant qu'infiniment petit, à ε ou $\frac{ds}{R}$, puisque MM_1 est le cercle osculateur

en M. Donc

$$FM'H = \frac{ds}{2R},$$

d'où

$$\text{(VII)} \qquad Z = M'M_1 \left(M_1M'F + \frac{ds}{2R} \right).$$

$M'M_1$ étant, en tant qu'infiniment petit, égal à la distance de M' au cercle osculateur, on a, comme on sait,

$$\text{(VIII)} \qquad M'M_1 = \frac{R' ds^3}{6R^2}.$$

D'ailleurs angle $M_1M'F = \frac{M_1F}{M'M_1}$, d'où, en vertu des équations (VI) et (VIII) données ci-dessus,

$$\text{(IX)} \qquad \text{angle}\, M_1M'F = \frac{ds}{4R}.$$

Les équations (VII), (VIII) et (IX) donnent

$$\text{(X)} \qquad Z = \frac{R' ds^4}{8R^3}.$$

Supposons maintenant que la courbe ne soit pas plane. Considérons sa projection sur le plan osculateur en M, et soit m' la projection de M' sur ce plan. La projection de $M'M_1$ sur la tangente en M est égale à celle de $m'M_1$.

Sur la projection de la courbe, prenons

$$\text{arc}\, MK = \text{arc}\, MM';$$

on aura

$$\text{arc}\, MK = \text{arc}\, MM_1.$$

Comme la courbe considérée et sa projection ont au point M non-seulement même cercle osculateur, mais encore même R', on a, par l'équation (X) ci-dessus,

$$\text{projection de } KM_1 \text{ sur la tangente en } M = \frac{R' ds^4}{8R^3}.$$

Remarquons maintenant que, comme on a par construction arc $m'K = \text{arc } MM' - \text{arc } Mm'$, et que cette différence est du cinquième ordre, comme il a été démontré ci-dessus en traitant la troisième des questions proposées, la projection de $m'M_1$ sur la tangente en M est, au cinquième ordre près, égale à celle de KM_1. On a donc, par l'équation précédente,

$$\text{projection de } m'M_1 \text{ sur la tangente en } M = \frac{R' ds^4}{8R^3};$$

d'où, en remplaçant R' par $\frac{u}{T}$ et la projection de $m'M_1$ par celle de $M'M_1$, qui lui est égale, comme nous l'avons fait remarquer tout à l'heure,

$$\text{projection de } M'M_1 \text{ sur la tangente en } M = \frac{u\, ds^4}{8R^3 T}.$$

CORRESPONDANCE.

Nous avons reçu de M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain, un *Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues,* où l'auteur critique un Mémoire de M. Hankel, professeur à l'Université de Tubingue, qui admet l'existence de fonctions continues n'ayant pas de dérivée. M. Darboux a récemment communiqué à ce sujet, à la Société mathématique de France, une Note *Sur les intégrales des fonctions discontinues et sur les fonctions continues qui n'ont pas de dérivées*. Nous y reviendrons.

M. Bourguet, de Nantes, nous fait remarquer que la proposition qui fait l'objet de la question 1109 n'est pas entièrement exacte, comme le prouve du reste l'élégante démonstration de M. Poujade. Les points d'intersection des diamètres des paraboles, relatifs aux points de contact,

avec les côtés du triangle, sont sur trois droites issues des trois sommets et concourantes, *ou bien sont trois points en ligne droite.*

M. Bourguet nous communique en outre, à propos de la question 1086, cette proposition d'un de ses élèves :

« Lorsque deux coniques ont un foyer commun, le quadrilatère formé par les quatre tangentes qui ont pour corde des contacts la ligne des deux foyers non communs jouit des propriétés suivantes :

» 1° La droite qui passe par le milieu des diagonales coupe perpendiculairement, et en son milieu, la droite des foyers non communs; 2° les distances des sommets du quadrilatère à la même droite sont égales à la somme et à la différence des demi-axes focaux des coniques. »

M. B. Niewenglowski, professeur au lycée de Clermont-Ferrand, m'a envoyé une *Note sur la discussion du cas des triangles sphériques, dans lequel les données sont a, b,* A. L'auteur prétend que l'on s'est jusqu'ici universellement trompé dans cette discussion, et, parmi les ouvrages incriminés, il cite le *Traité de Trigonométrie* de M. J.-A. Serret.

Or, en me reportant à la page 191 de ce *Traité, le seul que je possède,* j'y lis :

« Il faut, pour que le problème soit possible, que $\frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ soit moindre que 1; si cette condition est remplie, il y a deux valeurs de B qui satisfont à l'équation $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$: l'une M est plus petite que 90°, l'autre M' est égale à 180° — M.

» Pour que l'une de ces valeurs de B réponde à la question, il faut et il suffit (n° 149) que A — B et $a - b$ aient le même signe. Ainsi la condition pour que M ré-

ponde à la question est que $A - M$ soit de même signe que $a - b$; de même la condition pour que M' y réponde est que $A - M'$ soit de même signe que $a - b$. »

Suit une discussion où M. Serret examine les différents cas où M et M′ répondent à la question. Or il est bien clair qu'il faudrait être dénué de sens commun pour aller discuter sur M et M′, dans le cas où ils n'existeraient pas. Or c'est précisément ce dont M. Niewenglowski accuse tous les auteurs, y compris M. Serret, ainsi qu'on en pourra juger par la réponse suivante qu'il a faite à mes observations :

« Vous me dites que, dans le tableau de discussion du problème en question, les auteurs que je critique ont supposé que, *bien entendu,* la condition

$$\frac{\sin A \sin b}{\sin a} \leq 1$$

est vérifiée. Eh bien! cette explication n'est pas soutenable. Soyons francs. Supposez que la discussion donnée par M. Gerono, votre *collaborateur,* pour lequel j'ai d'ailleurs une profonde estime, ne soit pas une de celles que je conteste, n'auriez-vous pas accepté ma Note? Eh bien! ouvrons le *Traité de Trigonométrie* de M. Serret, p. 191 et 192 (4e édition), par exemple :

« 1° Si a est $< b$, la formule $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ donne » $M > A$, et, à plus forte raison, $M' > A$; *il y a donc* » *deux solutions,* etc. »

» Donc, pour former le tableau de la page 193, *on tient compte de la formule* $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$, et il est impossible que, quand je lis : si l'on a $A < 90°$, $b < 90°$, $a < b$, il y a deux solutions, je n'en conclue, en toute

confiance, qu'il y aura toujours deux solutions, si ces conditions sont vérifiées.

» Discuter un problème, c'est, pour tout le monde, indiquer le moyen de reconnaître *a priori* sur les données si le problème est possible, et combien il a, suivant les cas, de solutions. Je maintiens donc mon dire, et je vous serais reconnaissant si vous vouliez bien insérer ma Note. Si vous persistez à me croire dans l'erreur, qui vous empêche de faire des réserves? Mais, encore un coup, il y aurait donc dans le tableau de la p. 193 des résultats toujours vrais, comme, par exemple,

$A > 90°$, $b < 90°$, $a > b$ et $a + b \leq 180°$ une solution,

et d'autres vrais seulement quelquefois, conditionnellement. Quand j'aurai le temps, j'enverrai ma Note à M. Serret. Si vous le voyez, ayez la bonté de lui en parler; je suis sûr qu'il changera cette discussion dans une édition subséquente. En tout cas, avouez que la solution que je vous ai envoyée est plus claire, sinon plus exacte. »

M. Niewenglowski se trompe encore sur ce point. La solution qu'il m'a envoyée est, en effet, une solution absolument géométrique, et ce qu'il y a à faire, au point de vue trigonométrique, est précisément de déduire des formules, et des formules seules, tous les résultats qu'on peut obtenir géométriquement.

Enfin cette discussion n'eût jamais vu le jour, sans la dernière lettre que voici :

« Je vous demande pardon de revenir encore sur la discussion *du cas douteux*, mais voici un argument en faveur de mon opinion, que je crois péremptoire.

Si

$$A > 90°, \quad b < 90°, \quad a > b, \quad a + b \leq 180°,$$

ces Messieurs disent : *aucune solution.*

» Ici vous ne pourrez pas m'objecter qu'ils supposent *a priori* que la condition $\sin B \leq 1$ est satisfaite, ou plutôt qu'elle ne l'est pas.

» Quand on annonce qu'il y a une solution par exemple, si je vous réponds qu'il n'y en a pas, vous m'objectez que l'on suppose, *bien entendu,*

$$\frac{\sin A \sin b}{\sin a} \leq 1.$$

Or ici j'admets parfaitement votre objection, *il est supposé que*

$$\frac{\sin A \sin b}{\sin a} \leq 1;$$

et ces Messieurs disent, dans le cas considéré : *aucune solution.*

» Or soient

$$A = 120^\circ, \quad a = 60^\circ, \quad b = 45^\circ,$$

on est bien dans le cas considéré.

» Or

$$\sin B = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

l'hypothèse est justifiée; donc $\sin B$ est réel,

$$B' = 45^\circ, \quad B'' = 135^\circ;$$

alors

$$a - b > 0, \quad 120^\circ - 45^\circ > 0, \quad 120^\circ - 135^\circ < 0;$$

donc il y a une solution.

» Je crois, Monsieur, que cette fois vous serez convaincu et que M. Gerono voudra bien reconnaître son erreur. Mon Dieu ! c'est pourtant si facile de se tromper, qu'il y a à mon avis beaucoup de gloire à reconnaître son

erreur : *Errare humanum est, sed in errore perseverare diabolicum.*

» Prouvez-moi que je me trompe de nouveau, ou autrement je ne comprendrai pas pourquoi vous refusez d'insérer mon article. »

Il suffit d'ouvrir le *Traité de Trigonométrie* de M. Serret, à la page citée par l'auteur, pour y lire, dans le cas particulier considéré,

$A > 90°$, $b < 90°$, $a > b$ et $a + b \leq 180°$ une solution;

ce qui est exactement le contraire de ce qu'il y a lu.

Ch. B.

BIBLIOGRAPHIE.

Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni,* socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Voici la Table des matières des quatre dernières livraisons de ce Bulletin, qui renferme beaucoup de documents historiques inédits et d'un grand intérêt.

Mai 1872. — Notice sur les travaux de *Jules Plücker* par M. *Alfred Clebsch,* membre de la Société royale de *Gœttingue,* traduit de l'allemand par le D[r] *Paul Mansion,* professeur à l'Université de *Gand.*

Juin. — Notice sur *Meindert Semeijns* par *D. Bierens de Haan.*

Intorno alla vita ed ai lavori di *Meindert Semeijns*, par *B. Boncompagni.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

JUILLET. — Cenni biografici del *P. Giovanni Antonelli* delle *scuole Pie*, per *Andrea Stiattesi*.

Catalogo dei lavori del *P. Giovanni Antonelli*.

Intorno ad un' opera dell' abate *Nicolo Luigi de Lacaille* intitolata « Leçons élémentaires de Mathématiques, etc. » par *B. Boncompagni* (*).

Lettre de M. *L.-Am. Sédillot* à *D. B. Boncompagni*, au sujet d'une Note de M. *Th. Henri Martin*.

Intorno al volume intitolato « Geschichte der mathematischen Wissenschaften, 1e *Theil*. Von den ältesten Zeiten bis Ende des 16 Jahrhunderts. Von Dr *Heinrich Suter*. Zürich, im Commissionsverlage von *Orell*, *Füssli* und *C°*. 1872. » Relazione del Dott. *Ermanno Hankel*, professore di matematiche nell' Università di *Tubingen*. Traduzione del signor *Filippo Keller*.

AOUT. — Intorno ad uno scritto del sign. Prof. *Angelo Genocchi*. Lettera del Conte *Luigi Federico Menabrea* a *D. B. Boncompagni*.

Sur quelques points de l'histoire de l'Astronomie ancienne, et en particulier sur la précession des équinoxes. Lettre de M. *L.-Am. Sédillot* à *D. B. Boncompagni*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

AN ELEMENTARY TREATISE ON THE DIFFERENTIAL CALCULUS, containing the theory of plane curves, with numerous examples; by *Benjamin Williamson*, fellow and tutor, Trinity college, Dublin,

Ce *Traité de Calcul différentiel*, imprimé pour la première fois en 1872, en est déjà à sa deuxième édition. Comme dans la plupart des traités anglais, les divisions de l'Ouvrage sont bien nettement indiquées, et le format en est commode; ce sont là,

(*) Dans un tirage à part, intitulé *Intorno alla vita ed ai lavori del P. Giovanni Antonelli delle scuole Pie, cenni di Andrea Stiattesi*, se trouve un catalogue rédigé par le prince *B. Boncompagni* : 1° des éditions du texte français des *Leçons élémentaires de Mathématiques* de l'abbé *Nicolas-Louis de Lacaille*; 2° des éditions des traductions italiennes et latines de cet Ouvrage, et même d'une traduction grecque qui a paru à Venise en 1797.

si l'on veut, des qualités accessoires, mais qui facilitent considérablement le travail aux élèves et que l'on néglige peut-être trop en France (*).

Le Calcul infinitésimal a été présenté de bien des manières depuis son invention, mais au fond toutes ces manières se ramènent à deux. L'une des méthodes consiste à admettre que nous avons une notion innée de l'infini et de l'infiniment petit, notion à laquelle il est impossible de substituer aucune définition, absolument comme nous avons la notion de l'espace et du temps dont nous parlons sans pouvoir les définir. En se plaçant dans cet ordre d'idées, on comprend la série divergente, l'esprit embrasse pour ainsi dire les termes jusqu'à leurs dernières limites et conçoit leur somme; les courbes deviennent de véritables polygones rectilignes, les surfaces sont des polyèdres, etc., mais l'expérience a démontré que la métaphysique résultant de ces conceptions, d'un ordre peut-être trop élevé, conduisait souvent à de grossières erreurs; et les esprits rigoureux se sont de tout temps refusés à admettre les doctrines fondées sur la considération de l'infini *a priori*, bien que ces doctrines aient été acceptées sans discussion par les plus grands géomètres des deux derniers siècles.

L'autre méthode conduit à l'étude des limites des rapports et des sommes de quantités variables dont la grandeur absolue peut être abaissée au-dessous de toute quantité fixe donnée *a priori*. Cette méthode est celle que l'on semble avoir définitivement adoptée en France, où elle a, je crois, pris naissance il y a une cinquantaine d'années. La méthode des limites, dans laquelle on définit l'infiniment petit, semble au premier abord moins large que la précédente; mais elle jouit de deux avantages précieux : elle n'élève de doute dans l'esprit d'aucun géomètre, et ses indications ont toujours été trouvées parfaitement exactes. On lui avait reproché à l'origine ses tendances restreintes et peu philosophiques; mais il est aujourd'hui bien établi que de cet esprit de rigorisme pouvaient naître des idées

---

(*) Sur ce point, nous ne sommes pas du tout de l'avis de l'auteur.
CH. B.

fécondes, que des conceptions, en apparence plus larges, nous auraient à jamais cachées.

M. Williamson a cru devoir adopter la première façon de présenter les choses; nous ne voulons point ici critiquer sa manière de voir : ignorant les exigences des programmes et les habitudes de nos voisins d'outre-Manche, nos critiques seraient très-probablement mal fondées : du reste, il faut avouer que les théories purement infinitésimales sont bien plus goûtées des commençants, en ce sens qu'elles fatiguent moins leur attention. Peut-être vaut-il mieux les employer franchement, quand on veut former des ingénieurs et non des savants. Les conséquences des doctrines adoptées par M. Williamson sont la méthode des coefficients indéterminés, l'ancienne démonstration de la formule $\lim \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$, et quelques autres théories que nous n'admettrions point dans notre enseignement. Quoi qu'il en soit, nos jeunes candidats à la licence trouveront, dans l'Ouvrage dont nous donnons l'analyse, de nombreux exercices à la fin de chaque chapitre, ce qui fait généralement défaut dans nos traités classiques. Nous leur recommanderons surtout la théorie des maxima et des minima, à laquelle l'auteur semble avoir accordé une préférence, et le dernier chapitre relatif au changement de variables. Voici du reste les titres des principales subdivisions.

1. Premiers principes; différentiation. — 2. Différentiations successives. — 3. Développements en série. — 4. Formes indéterminées. — 5. Différentielles partielles. — 6. Différentielles partielles des divers ordres. — 7. Formules de Lagrange et de Laplace. — 8. Généralisation du théorème de Taylor. — 9. Maxima des fonctions d'une variable. — 10. Maxima des fonctions de deux variables. — 11. Théorie des multiplicateurs. — 12. Tangentes et normales. — 13. Asymptotes. — 14. Points multiples. — 15. Enveloppes. — 16. Convexité, points d'inflexion. — 17. Courbure, osculation. — 18. Discussion des courbes. — 19. Élimination des arbitraires. — 20. Changement de variable.

La seconde édition diffère peu de la première; l'auteur s'est borné à y introduire quelques additions destinées à éclaircir certaines théories.

H. L.

COURS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE; par *Joseph Carnoy*. Paris, Gauthier-Villars. In-8°; 1872. Prix : 8 fr.

La Géométrie analytique s'est considérablement perfectionnée par l'emploi de nouveaux systèmes de coordonnées, où l'on représente un point par ses distances à trois droites fixes et où l'on détermine la position d'une droite qui roule sur une courbe par ses distances à trois points fixes : de là dérivent les coordonnées triangulaires et tangentielles. L'auteur s'est efforcé, dans ce cours, de faire ressortir les avantages que présentent les nouvelles coordonnées dans les questions où l'on doit considérer des points ou des droites à l'infini, et en général dans l'étude des propriétés descriptives des figures où le système des coordonnées cartésiennes ne répond que difficilement au but que l'on veut atteindre.

Après avoir traité les différents problèmes sur la ligne droite suivant les coordonnées de Descartes, il a défini les coordonnées nouvelles pour les appliquer à la solution des mêmes questions, afin d'habituer les élèves dès le commencement au nouveau mode de représentation du point et de la droite. De même, dans l'étude du cercle, dans la discussion de l'équation générale du second degré, il a fait marcher côte à côte les différents systèmes de coordonnées et indiqué les équations du cercle et des lignes du second ordre, suivant le choix des axes et la position du triangle de référence. Il a donné peu d'étendue au chapitre consacré à la construction des courbes : toutes les questions relatives à la discussion d'une ligne plane trouvent leur place naturelle dans les applications géométriques du Calcul différentiel. Il lui a semblé plus utile d'attirer l'attention des élèves sur les diverses méthodes analytiques employées dans la théorie des courbes du second ordre : ils apprécieront d'autant mieux les ressources de chacune d'elles et la facilité avec laquelle on en déduit les propriétés nombreuses des sections coniques. Quant aux courbes d'ordre plus élevé, il s'est borné à indiquer plusieurs théorèmes généraux en renvoyant à l'excellent ouvrage *Higher plane curves*, de M. Salmon.

---

de son *Traité de Cinématique pure*, en y introduisant les théorèmes de Poinsot, les équations d'un système matériel par rapport à trois axes coordonnés rectangulaires mobiles autour de leur origine, une théorie très-simple du mouvement d'un projectile oblong dans un milieu résistant, enfin les équations générales du mouvement d'un solide mobile autour d'un point fixe, rapportées à trois axes rectangulaires mobiles ayant ce point pour origine. La théorie des chocs qui fait suite se distingue par certaines applications, la généralisation du théorème de Carnot, et les équations générales relatives au choc de deux corps lorsqu'ils sont parfaitement élastiques, mous, semi-élastiques.

Ce premier volume se termine par la théorie du mouvement d'un corps solide par rapport à un système invariable.

AOUST (l'Abbé), professeur d'Analyse infinitésimale à la Faculté des Sciences de Marseille. — **Analyse infinitésimale des courbes planes**, contenant la résolution d'un grand nombre de problèmes choisis, à l'usage des candidats à la licence ès sciences. In-8, avec 80 figures dans le texte; 1873.. 8 fr. 50 c.

L'élément nouveau que l'Auteur a introduit dans son *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, sous le nom de *courbure inclinée*, lui a rendu des services non moins importants dans l'*Analyse infinitésimale des courbes planes*. L'usage des coordonnées naturelles favorise en effet le Calcul et la Géométrie, soit en abrégeant la route, soit en découvrant des horizons nouveaux; il est même indispensable dans certaines questions qui, sans cela, seraient inabordables. L'Ouvrage est divisé en trois Livres: le premier consacré aux coordonnées simples, le deuxième aux coordonnées complexes, le troisième aux coordonnées d'un ordre quelconque. Dans tout le cours de son travail, l'auteur a insisté sur la résolution des problèmes, et a mis en contraste la méthode nouvelle avec celle que l'on suit ordinairement. D'ailleurs ces questions, liées entre elles et échelonnées, forment, quant à la matière et quant à l'ordre, un corps de doctrines géométriques et un recueil homogène d'exercices utiles à ceux qui veulent pénétrer dans la connaissance du Calcul infinitésimal.

CONNAISSANCE DES TEMPS ou **DES MOUVEMENTS CÉLESTES**, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, **POUR L'AN 1874**, publiée par le **BUREAU DES LONGITUDES**. Grand in-8; 1872.

Sans Additions.. 3 fr. 50 c.
Avec Additions.. 6 fr. 50 c.

Pour recevoir l'Ouvrage franco *par la poste en France, ajouter* 75 *cent.*

D'ABBADIE (**A.**), Membre de l'Institut. — **Géodésie d'Éthiopie**, ou Triangulation d'une partie de la haute Ethiopie, exécutée selon des méthodes nouvelles par A. d'Abbadie; vérifiée et rédigée par *R. Radau*. Grand in-4°, de XXXII-504 pages, avec 11 cartes et 10 planches; 1873....... 30 fr.

DUCLAUX, Professeur à la Faculté de Clermont-Ferrand. — **Théorie élémentaire de la capillarité**, fondée sur la connaissance expérimentale de la tension superficielle des liquides. Grand in-8; 1872.......... 1 fr.

DU MONCEL (**Th.**), Ingénieur électricien de l'Administration des Lignes télégraphiques. — **Exposé des Applications de l'Électricité**. *Technologie électrique*. 3e édition, entièrement refondue. Cette édition formera 4 volumes grand in-8, avec de nombreuses figures dans le texte.

En vente les tomes I et II : *Technologie électrique.*

TOME I, 516 pages, 1 planche et 99 figures; 1872.... 12 fr. 50 c.

TOME II, 560 pages, 1 tableau, 2 planches et 192 fig.; 1873.. 12 fr. 50 c.

TABLE DES MATIÈRES.

Mai 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

July 5

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

JUIN 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE.

RÉDIGÉ PAR

M. GERONO,
Professeur de Mathématiques,

ET

M. CH. BRISSE,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1873 est en cours de publication.

On ne peut s'abonner que pour l'année entière.

L'abonnement est augmenté de 3 francs à partir de l'année 1869, et les prix pour les divers pays se trouvent dorénavant fixés ainsi qu'il suit :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Égypte, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Portugal, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége, Suède	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861), au lieu de 240 francs 200 francs payables de la manière suivante : 100 francs comptant, et les 100 francs restants en un bon à trois mois à l'ordre de M. Gauthier-Villars, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes..

Les tomes X et XVI à XX (1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.

Les autres tomes de la première série se vendent séparément...... 12 fr.

La **DEUXIÈME SÉRIE**, commencée en 1862, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les tomes I à V (1862 à 1866) ne se vendent pas séparément.

Les tomes suivants de la deuxième série se vendent séparément... 15 fr.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 193);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES A LA SOLUTION GRAPHIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES.

Procédés généraux.

61. En étudiant avec attention les treize règles ci-dessus, y compris le principe fondamental (10, 18, 19, 20, 23, 46, 50,..., 57) et la manière (44) d'exprimer que trois points sont en ligne droite, on reconnaîtra, je l'espère, toute la facilité avec laquelle découlent les conséquences des quelques principes qui constituent la méthode des équipollences. Ces conséquences comprennent toutes les propositions de la Géométrie plane; pour en développer les démonstrations, le calcul suffira, sans qu'il soit besoin d'aucune considération géométrique. On peut en dire autant de la méthode des coordonnées; mais celle-ci emploie des procédés plus artificiels, tandis que la méthode des équipollences représente chaque droite au moyen de sa grandeur et de son inclinaison; pour représenter un point, deux coordonnées sont nécessaires, au lieu qu'une équipollence suffit à cela.

Une des conséquences de cette différence essentielle entre les deux méthodes consiste en ce que les solutions graphiques des problèmes, dues à la méthode des coordon-

nées, sont le plus souvent fort longues; les solutions que nous offrent les équipollences le disputent, au contraire, en élégance comme en simplicité, à celles fournies par la voie indirecte de la synthèse géométrique.

62. Nous allons indiquer la marche générale à suivre pour trouver la solution graphique d'un problème; ceci sera du reste éclairci par quelques exemples.

On exprime toutes les conditions du problème au moyen d'équipollences entre les parties connues et les parties inconnues de la figure, en cherchant à réduire ces dernières au plus petit nombre possible. Si l'on arrive à obtenir une équipollence, avec un seul point inconnu, elle se résoudra à la manière des équations; alors, conformément aux définitions établies (6, 16, 17), on construira la formule de résolution. Aux nos 40 et 47, nous avons déjà donné deux exemples de cette manière de procéder.

63. Les conditions ne seront pas toujours réductibles à une telle simplicité; parmi elles figureront souvent des expressions de coefficients inconnus, ou d'angles inconnus, représentés par le ramun, élevé à une puissance inconnue. En pareil cas, il faudra recourir à l'élimination; et chacun sait quelle part appartient à la sagacité du calculateur, lorsqu'il s'agit d'en rendre les résultats aussi simples que possible.

Il convient d'observer qu'une équipollence suffit à déterminer deux inconnues, grandeurs ou inclinaisons; en employant sa conjuguée (46), il serait possible d'éliminer l'une des inconnues; mais on pourra fréquemment s'en dispenser, comme nous nous réservons de le mieux faire voir sur des exemples. Pour l'instant, nous le donnons seulement à entendre d'une façon générale.

64. Soient z, y deux grandeurs, et u, v deux inclinaisons inconnues. Si l'équipollence finale est de la forme (40)

$$z\varepsilon^{u}\mathrm{AB} \bumpeq \mathrm{CD},$$

où AB, CD soient deux droites que l'on sache construire, on aura

$$z\varepsilon^{u} \bumpeq \mathrm{CD} : \mathrm{AB},$$

équipollence qui, par rapport à l'unité de longueur adoptée et à l'origine des inclinaisons, nous fournira les valeurs numériques de z et de u.

65. Si l'équipollence finale est au contraire de la forme

$$z\mathrm{AB} + y\mathrm{CD} \bumpeq \mathrm{OU},$$

en la comparant terme à terme avec l'identité

$$\mathrm{OV} + \mathrm{VU} \bumpeq \mathrm{OU},$$

on voit que, si l'on construit, sur la droite donnée OU, un triangle dont un côté OV ait la même inclinaison que la droite AB, et l'autre VU la même inclinaison que CD, z et y seront les rapports numériques OV : AB et VU : CD ; l'un et l'autre se trouveront par conséquent déterminés.

66. Semblablement l'équipollence

$$\varepsilon^{u}\mathrm{AB} + y\mathrm{CD} \bumpeq \mathrm{OU}$$

se résoudra en menant UV parallèle à CD, et en coupant cette droite par un arc de cercle de centre O et d'un rayon égal à AB ; si bien que le côté OV du triangle OVU sera égal à AB, et que les deux inconnues seront déterminées par les équipollences

$$\varepsilon^{u} \bumpeq \mathrm{OV} : \mathrm{AB}, \quad y \bumpeq \mathrm{VU} : \mathrm{CD}.$$

67. Si, enfin, on a l'équipollence

$$\varepsilon^{u}AB + \varepsilon^{v}CD \triangleq OU,$$

en la comparant toujours avec

$$OV + VU \triangleq OU,$$

on sera conduit à construire sur OU un triangle dont les côtés OV, OU soient respectivement égaux à AB, CD, et l'on aura

$$\varepsilon^{u} \triangleq OV : AB, \quad \varepsilon^{v} \triangleq VU : CD.$$

68. On sera fréquemment conduit à une équipollence ne renfermant qu'une seule inconnue

$$\varepsilon^{u}AB + \varepsilon^{-u}CD \triangleq OU.$$

Au lieu de la résoudre à la manière des équations du second degré, on la traitera de préférence comme celle du numéro précédent, ε^{u}, ε^{-u} étant considérées comme deux inconnues distinctes.

Problèmes divers.

69. Problème. — *Construire un triangle* CBX (*fig.* 14), *connaissant la base* CB, *un angle adjacent* CBD *et une relation du premier degré*

$$BX = a + m\,CX$$

entre les longueurs des deux côtés CX, BX.

Puisque, dans la condition du problème, entre la grandeur de la droite inconnue CX, il y aura lieu de poser

$$CX \triangleq z\varepsilon^{u},$$

il en résulte que cette condition sera

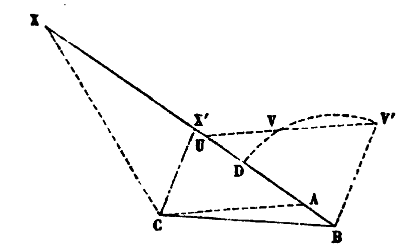
$$\text{gr.}\,BX = a + mz.$$

La direction de cette droite BX est connue, de sorte qu'en prenant BD égale à l'unité de longueur, nous aurons

$$BX \doteq (a + mz)BD.$$

Nous obtenons ainsi deux équipollences, ce qui est précisément nécessaire pour déterminer le point X et les

Fig. 14.



deux inconnues z, u. Au moyen de la règle I, on élimine rapidement le point X, et l'on a l'équipollence

$$CX - CB \doteq z\varepsilon^u - CB \doteq (a + mz)BD.$$

Elle est en réalité de forme trinôme, puisque les deux termes connus peuvent être réunis ensemble; divisée par z, elle prend la forme remarquée au n° 66

$$\varepsilon^u - \frac{1}{z}(CB + aBD) \doteq mBD,$$

et par suite le problème se résout au moyen d'une facile construction de triangle.

Prenant $BA \doteq aBD$, $BU \doteq mBD$, l'équipollence deviendra

$$\varepsilon^u - \frac{1}{z}CA \doteq BU.$$

Comparée terme à terme avec l'identité

$$BV - UV \mathrel{\underline{\triangle}} BU,$$

elle nous montre qu'il faut mener UV parallèle à CA, et couper cette droite en V par le cercle de centre B et de rayon BD ; la droite CX parallèle à BV satisfait à la condition donnée

$$BX = BA + mCX \quad \text{ou} \quad AX = mCX.$$

Il serait possible d'abréger un peu cette construction.

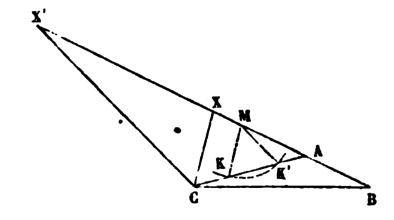
ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 69.

Soit (*fig.* 14 *bis*) $BA = a$, cette longueur étant portée sur la direction BX. Posons encore

(1) $$CX \mathrel{\underline{\triangle}} z\varepsilon^{u}.$$

Construisons, à la suite de BA, la longueur AM, telle que son rapport

14 *bis.*



à l'unité de longueur soit égal à m. On aura

$$\text{gr.}\,AX = \text{gr.}(mCX) = mz = z\,\text{gr.}\,AM ;$$

et, par conséquent,

(2) $$AX \mathrel{\underline{\triangle}} zAM.$$

Retranchant (1) de (2),

(3) $$AC \mathrel{\underline{\triangle}} z(AM - \varepsilon^{u}).$$

Si, du point M comme centre, nous coupons AC en K par un arc de rayon $MK = 1$, nous aurons

(4) $$AC \mathrel{\underline{\triangle}} z(AM - KM) \mathrel{\underline{\triangle}} zAK.$$

La comparaison des équipollences (3) et (4) nous donne KM $\mathrel{\underline{\triangle}}$ ε^{0}, c'est-à-dire que CX sera parallèle à KM. Dans le cas de la figure, il y a deux solutions.

La valeur de z est, comme on voit, $\frac{AC}{AK}$, de sorte que l'on aura

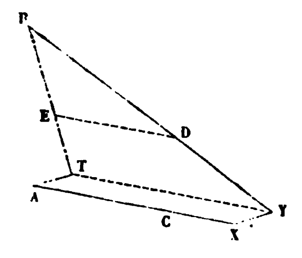
$$\frac{CX}{KM} = \frac{AC}{AK}.$$

Cela résulte évidemment de la similitude des triangles.

On peut remarquer que les grandeurs de CX, CX' sont, d'après cela, inversement proportionnelles à celles de AK, AK'.

70. Problème. — *Deux points mobiles partant au même instant de* A, B (*fig.* 15) *parcourent avec des vi-*

Fig. 15.



tesses AC, BD *les droites* AX, BY. *On demande où a lieu leur plus grand rapprochement* XY.

Après le temps t, les points se trouvant en X, Y, on aura

$$AX \mathrel{\underline{\triangle}} t\,AC, \quad BY \mathrel{\underline{\triangle}} t\,BD.$$

Mais, d'après la règle I,

$$XY \mathrel{\underline{\triangle}} AB + BY - AX \mathrel{\underline{\triangle}} AB + t(BD - AC).$$

De là, DE étant menée équipollente à CA, on tire

$$XY \mathrel{\underline{\triangle}} AB + t\,BE \mathrel{\underline{\triangle}} AT.$$

Or, de tous les points de la droite BE, le plus voisin du point A n'est autre que le pied de la perpendiculaire AT;

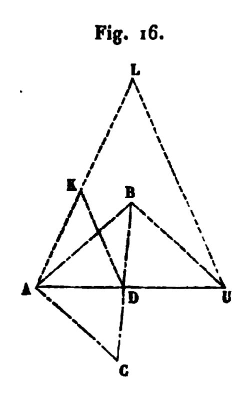
la droite cherchée XY sera donc équipollente à cette perpendiculaire AT, et on la construira en menant TY parallèle à AC.

71. Cette solution conviendrait encore si les droites AC, BD n'étaient pas situées dans un même plan, les trois premières règles s'appliquant aussi à l'espace.

Du reste, il était facile de la trouver par la considération des mouvements relatifs, parce que, dans la méthode des équipollences, ce que nous appelons *composition des droites* (5) correspond pleinement à la composition des mouvements.

72. Problème. — *Construire un triangle connaissant deux de ses côtés* AB, AC (*fig.* 16) *et la bissectrice* AD *de l'angle qu'ils forment, limitée au côté opposé.*

Fig. 16.



Prenant AD pour origine des inclinaisons (13), nous désignerons par u l'angle inconnu CAD = DAB, en sorte que

$$\mathrm{AB} \doteqdot c\varepsilon^{u}, \quad \mathrm{AC} \doteqdot b\varepsilon^{u},$$

c et b étant les longueurs données de ces côtés.

La condition que CD, DB forment une seule droite est exprimée par

$$CD \bumpeq p\,DB,$$

ou

$$AD - b\varepsilon^{-u} \bumpeq p(c\varepsilon^{u} - AD).$$

Entre cette équipollence et sa conjuguée

$$\text{cj}.AD - b\varepsilon^{u} \bumpeq p(c\varepsilon^{-u} - \text{cj}.AD)$$

(dans laquelle nous remarquerons que AD, ayant une inclinaison nulle, ne diffère pas de sa propre conjuguée), nous éliminerons le coefficient numérique p, et nous aurons

$$bc\varepsilon^{2u} - (b+c)\varepsilon^{u}AD + (AD)^2 \bumpeq bc\varepsilon^{-2u} - (b+c)\varepsilon^{-u}AD + (AD)^2.$$

Cette équipollence est du quatrième degré par rapport à l'inconnue ε^u; elle admet les deux solutions $\varepsilon^u \bumpeq \pm 1$ pour lesquelles le triangle se réduirait à une seule droite.

Nous la diviserons donc par $\varepsilon^u - \varepsilon^{-u}$, et nous obtiendrons l'équipollence trinôme

$$c\varepsilon^{u} + c\varepsilon^{-u} \bumpeq \frac{b+c}{b} AD,$$

laquelle, comparée terme à terme (68) avec

$$AB + BU \bumpeq AU,$$

nous montre qu'on est conduit à construire le triangle AUB, dans lequel nous connaissons le côté

$$AU \bumpeq \frac{b+c}{b} AD,$$

et les longueurs c des côtés AB, BU, dont les inclinaisons u, $-u$ sont inconnues. Pour déterminer AU, nous prendrons sur la droite quelconque AKL les longueurs AK $= b$,

KL $= c$, d'où il suit que

$$LU \bumpeq AU - AL \bumpeq \frac{b+c}{b}(AD - AK) \bumpeq \frac{b+c}{b} KD$$

sera parallèle à KD.

La droite AC, égale à b et parallèle à BU, complétera le triangle cherché ABC.

Cette solution est plus directe que celle donnée par Lamé, en 1818, dans son excellent *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, p. 15.

73. En substituant la valeur trouvée

$$\varepsilon^{u} + \varepsilon^{-u} \bumpeq (b+c)\,AD : bc$$

dans la somme de la première équipollence et de sa conjuguée, on trouve

$$p = b : c.$$

D'où l'on conclut que la bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents. Ce théorème peut s'obtenir plus rapidement de la manière suivante :

La condition que AD soit bissectrice de l'angle CAB est exprimée (16) par

$$(AD)^2 \bumpeq n\,AB.AC,$$

n étant un nouveau coefficient numérique; et la condition que D appartienne à la droite CB (44) par l'équipollence

$$p\,AB - (1+p)\,AD + AC \bumpeq 0,$$

laquelle résulte (10) de $CD \bumpeq p\,DB$.

Éliminant AD, on obtient

$$n(1+p)^2 AB.AC \bumpeq p^2 AB^2 + AC^2 + 2p\,AB.AC,$$

qui se réduit aisément à une équation trinôme, et nous donne, d'après la règle IV,

$$p\,\text{gr.}\,AB = \text{gr.}\,AC.$$

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 73.

On peut encore démontrer simplement le théorème en question de la manière suivante :

On a

$$(1)\qquad AB \triangle AD + DB$$

et

$$AC \triangle AD - CD.$$

Posons

$$\frac{\text{gr.}\,CD}{\text{gr.}\,DB} = p,$$

et prenons AD pour origine des inclinaisons. AC sera exprimée par $\frac{b}{c}\,\text{cj.}\,AB$, puisque AD est bissectrice de BAC; et nous aurons

$$\frac{b}{c}\,\text{cj.}\,AB \triangle AD - p\,DB.$$

Multipliant par $\frac{c}{b}$,

$$(2)\qquad \text{cj.}\,AB \triangle \frac{c}{b}\,AD - \frac{pc}{b}\,DB.$$

Ajoutons (1) et (2),

$$AB + \text{cj.}\,AB \triangle \left(1 + \frac{c}{b}\right) AD + \left(1 - \frac{pc}{b}\right) DB.$$

Le premier membre (règle X) et le terme $\left(1 + \frac{c}{b}\right) AD$ ont une inclinaison nulle. Donc (règle II)

$$1 - \frac{pc}{b} = 0, \quad p = \frac{b}{c},$$

ou

$$\frac{\text{gr.}\,CD}{\text{gr.}\,DB} = \frac{\text{gr.}\,AC}{\text{gr.}\,AB}.$$

Une démonstration analogue s'applique à la bissectrice AD′ de l'angle adjacent. On aura

$$AB \triangle AD' + D'B,$$
$$AC \triangle AD' + D'C,$$

ou

$$\frac{b}{c}\,\text{cj.AB} \triangleq \text{AD}' + p'\text{D}'\text{B}.$$

De là

$$\text{cj.AB} \triangleq \frac{c}{b}\text{AD}' + \frac{c}{b}p'\text{D}'\text{B};$$

et, par soustraction,

$$\text{AB} - \text{cj.AB} \triangleq \left(1 - \frac{c}{b}\right)\text{AD}' + \left(1 - p'\frac{c}{b}\right)\text{D}'\text{B}.$$

Le premier membre (règle XI) et le terme $\left(1 - \frac{c}{b}\right)\text{AD}'$ ayant une inclinaison de 1 droit, on a (règle II)

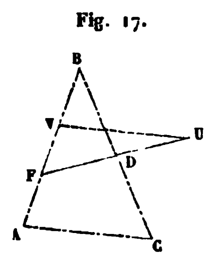
$$1 - p'\frac{c}{b} = 0, \quad p' = \frac{b}{c},$$

$$\frac{\text{gr.D}'\text{B}}{\text{gr.D}'\text{C}} = \frac{\text{gr.AB}}{\text{gr.AC}}.$$

74. Problème. — *Construire un triangle, connaissant les longueurs de deux côtés, et les positions de deux points coupant deux côtés dans des rapports donnés.*

Ce facile problème nous permettra de constater une fois de plus comment, sans qu'il soit besoin d'aucune considération géométrique, et en traduisant seulement en équipollences les données du problème, on est con-

Fig. 17.



duit à la solution. Désignons par b, f, g la longueur du côté AC (*fig.* 17) et les deux segments de AB; par u, v, les inclinaisons de ces côtés AC, AB; par m le rapport

dans lequel l'autre côté BC doit être coupé par le point donné D. Nous aurons les quatre équipollences

$$\begin{aligned} AC &\bumpeq b\varepsilon^{u}, \\ AF &\bumpeq f\varepsilon^{v}, \\ FB &\bumpeq g\varepsilon^{v}, \\ DC &\bumpeq m\,BD, \end{aligned}$$

qui suffiront à déterminer les trois points inconnus A, B, C et les deux inclinaisons u, v. Ces points s'éliminent aisément (10), et l'on obtient

$$b\varepsilon^{u} - f\varepsilon^{v} - FD \bumpeq m\,(FD - g\varepsilon^{v}),$$

équipollence qui prend immédiatement la forme trinôme

$$b\varepsilon^{u} + (mg - f)\,\varepsilon^{v} \bumpeq (m+1)\,FD.$$

La comparant terme à terme (67), avec

$$VU + FV \bumpeq FU,$$

on voit que, si l'on construit sur

$$FU \bumpeq (m+1)\,FD,$$

le triangle FVU avec les côtés FV, VU respectivement égaux à $mg - f$ et à b, ils seront par cela même parallèles aux côtés cherchés AB, AC.

75. Problème. — *Construire un triangle* AXY (*fig.* 18), *semblable à un triangle donné, et dont les sommets soient à des distances données d'un point* O (Carnot, *Géométrie de position*, § 328; Lamé, *Exposition, etc.*, p. 81).

J'abrége, à titre d'exercice, les calculs qui conduisent facilement à la solution.

On a

$$OX \bumpeq f\varepsilon^{u},$$
$$OY \bumpeq g\varepsilon^{v},$$
$$AY \bumpeq n\varepsilon^{\alpha} AX,$$

où le rapport n et l'angle α sont connus. Il en résulte

$$g\varepsilon^{v} - OA \bumpeq n\varepsilon^{\alpha}(f\varepsilon^{u} - OA),$$

ou

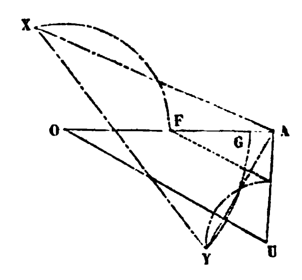
$$g\varepsilon^{v} - nf\varepsilon^{\alpha+u} \bumpeq (1 - n\varepsilon^{\alpha})\,OA,$$

que l'on comparera avec $OY - UY \bumpeq OU$, en posant

$$AU \bumpeq n\varepsilon^{\alpha} AO.$$

Cette droite AU se construira donc en formant le

Fig. 18.



triangle AOU, semblable à celui auquel AXY doit être semblable lui-même. Puis on fera

$$\text{gr.}\,OY = g,$$
$$\text{gr.}\,UY = nf = n\,\text{gr.}\,OF = \text{gr.}\,ON.$$

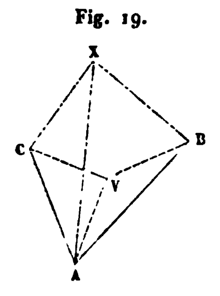
76. Problème. — *Déterminer le point* X, *d'où l'on voit sous des angles donnés les côtés du triangle* ABC (*fig.* 19 .

Les conditions du problème sont exprimées par

$$BX \bumpeq y\varepsilon^{\gamma}\,AX,$$
$$CX \bumpeq z\varepsilon^{-\beta}\,AX.$$

γ et β étant les angles donnés AXB, CXA.

Fig. 19.



Comme d'habitude, la règle I nous donne

$$AX \bumpeq AB + y\varepsilon^{\gamma}\,AX \bumpeq AC + z\varepsilon^{-\beta}\,AX,$$

et, en éliminant AX,

$$z\varepsilon^{-\beta}\,AB - y\varepsilon^{\gamma}\,AC \bumpeq AB - AC \bumpeq CB.$$

Cette équipollence, comparée (65) à

$$VB - VC \bumpeq CB,$$

nous conduit à former les angles ABV, ACV, égaux aux angles donnés AXC, AXB; après quoi l'on aura

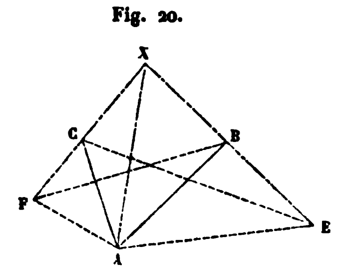
$$VB : AB \bumpeq z\varepsilon^{-\beta} \bumpeq CX : AX,$$

en sorte qu'on est ramené à construire le triangle ACX directement semblable à AVB.

77. Cette solution, tout à fait différente de celle que l'on obtiendrait par l'intersection des deux circonférences ABX, ACX, et présentant plus de simplicité, nous montre

comment l'étude des équipollences peut conduire, même dans des questions absolument élémentaires, à des résultats nouveaux.

Fig. 20.



Pour faire ressortir la fécondité de la méthode, cherchons une autre solution. Soit (*fig.* 20)

$$AX \bumpeq x\varepsilon^{u}.$$

Des équipollences

$$x\varepsilon^{u} \bumpeq AB + yx\varepsilon^{u+\gamma} \bumpeq AC + zx\varepsilon^{u-\beta},$$

nous nous proposons d'éliminer x, y, z.

La première, divisée par $\varepsilon^{u+\gamma}$, puis retranchée de sa conjuguée, donne

$$x(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma}) \bumpeq \varepsilon^{u+\gamma}\,\text{cj}.AB - \varepsilon^{-u-\gamma}AB.$$

On trouve pareillement

$$x(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}) \bumpeq \varepsilon^{-u+\beta}AC - \varepsilon^{u-\beta}\,\text{cj}.AC.$$

De là

$$[\varepsilon^{\gamma}(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta})\,\text{cj}.AB + \varepsilon^{-\beta}(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma})\,\text{cj}.AC]\,\varepsilon^{u}$$
$$\bumpeq [\varepsilon^{-\gamma}(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta})AB + \varepsilon^{\beta}(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma})AC]\,\varepsilon^{-u}.$$

Pour construire cette équipollence, il conviendra de la diviser par $\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}$, et de poser

$$\frac{\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma}}{\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}}\,\varepsilon^{\beta+\gamma}AC \bumpeq EA,$$

si bien qu'elle se réduira de la sorte à

$$\varepsilon^{u+\gamma}\,\text{cj.EB} \triangleq \varepsilon^{-u-\gamma}\,\text{cj.EB}.$$

Or, lorsqu'une expression est équipollente à sa propre conjuguée (45), l'une et l'autre ont une inclinaison nulle. Donc EB a pour inclinaison $u+\gamma$, et par suite est parallèle à $\text{BX} \triangleq \gamma x \varepsilon^{u+\gamma}$.

Grâce aux principes de trigonométrie que nous exposerons plus loin, il devient évident que le point E se construira en faisant l'angle EAC supplémentaire de l'angle donné $\text{CXB} = \beta + \gamma$; puis $\text{ACE} = \text{AXB} = \gamma$. La droite EB passera par le point cherché. Si pareillement BAF est supplémentaire de $\text{FBA} = \text{CXA}$, la droite FC passera par le même point X.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer l'analogie des *fig.* 6, 8, 19, 20, auxquelles correspondent les nos 29, 35, 38,..., 41, 76, 77.

(*A suivre.*)

SUR L'ACCÉLÉRATION NORMALE A LA TRAJECTOIRE D'UN POINT D'UN SYSTÈME INVARIABLE MOBILE DANS SON MOUVEMENT LE PLUS GÉNÉRAL;

PAR M. SABININE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

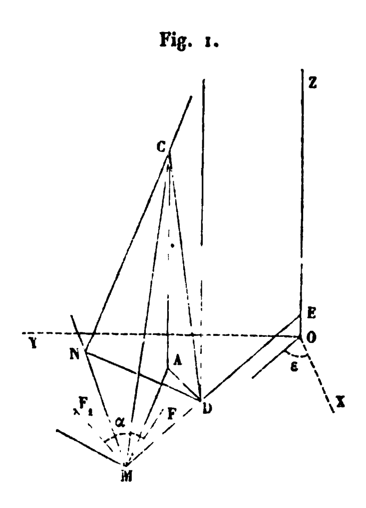
M. H. Resal, dans un Mémoire remarquable sur la Cinématique, intitulé : *Sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide* (*), donne pour l'accélération normale (p. 239) une expres-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, 37e Cahier, p. 227; 1858.

sion qui n'a pas lieu en général, et qui n'est applicable qu'au cas où l'accélération totale rencontre l'axe instantané. C'est ce qne nous allons démontrer, en donnant en même temps l'expression de l'accélération normale pour le cas le plus général.

Soient (*fig.* 1) OE l'axe instantané de rotation et de

Fig. 1.



glissement, et O le point où l'axe instantané est coupé par sa plus courte distance à sa position suivante; M un point du système; φ l'accélération totale de M, représentée sur la *fig.* 1 par MC; *r* la distance de M à l'axe instantané OE, représentée par ME; MF_1 la tangente en M au cercle que décrirait ce point en tournant autour de l'axe OE; MF la tangente et MN la normale principale en M à la trajectoire de ce point M. Toutes ces droites sont rapportées à trois axes rectangulaires, tels que les choisit M. Resal dans son Mémoire cité : pour l'origine des trois axes coordonnés, nous prenons le point O; pour l'axe Z, l'axe instantané, en supposant

que les axes X et Y soient perpendiculaires entre eux et à l'axe OZ; tandis que l'axe OX est dirigé suivant la vitesse orthogonale. En menant perpendiculairement les deux droites AD et AC, la première à MD et la seconde au plan EMF_1, on voit que la droite CD sera perpendiculaire à MD; par conséquent, cette droite MD est perpendiculaire au plan CAD et, de plus, au plan FMF_1, qui est parallèle à l'axe OZ; d'où il résulte que : 1° le plan normal, passant par MD, rencontre l'axe instantané OZ dans le point E; 2° le plan CAD, passant par le point C, est perpendiculaire au plan normal. Or, l'accélération totale φ étant dans le plan osculateur FMN, la perpendiculaire CN, abaissée du point C sur la normale principale MN, sera aussi perpendiculaire au plan normal; donc la droite CN se trouve dans le plan CAD et la droite ND est perpendiculaire à MD, comme l'intersection du plan CAD avec le plan normal.

Soient X, Y, Z les composantes de l'accélération φ parallèles aux axes OX, OY, OZ, égales respectivement au second membre de la seconde, de la troisième et de la première des équations (8) (p. 239) de M. Resal.

Appelant φ_n l'accélération normale et φ_t l'accélération tangentielle, nous aurons

$$(1) \qquad \varphi = \sqrt{\varphi_n^2 + \varphi_t^2}.$$

En désignant par S la projection de l'accélération φ sur la droite ME et par S_1 la projection de l'accélération φ_n sur le plan CAD, le triangle rectangle MND donnera

$$(2) \qquad \varphi_n = \sqrt{S^2 + S_1^2}.$$

Nommons L la vitesse de glissement, ω la vitesse angulaire instantanée autour de OE, et a l'angle que forme ωr

avec la vitesse $v = \sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}$ du point M; alors

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{tang}\, a &= \frac{L}{\omega}, \\ \cos a &= \frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}, \\ \sin a &= \frac{L}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}. \end{aligned} \right.$$

Soient

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les trois angles que forme S_1 respectivement avec les trois axes OX, OY, OZ;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les trois angles que forme φ_t respectivement avec les mêmes axes;

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois angles que forme ωr respectivement avec les mêmes axes;

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les trois angles que forme φ_n respectivement avec les mêmes axes, et

ε l'angle que forme d avec l'axe OX.

Comme l'angle α_3 est égal à l'angle a, nous aurons les équations suivantes :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos\beta_1 &= \cos a \cos\gamma_1, \\ \cos\beta_2 &= \cos a \cos\gamma_2, \\ \cos\beta_3 &= \sin a, \end{aligned} \right.$$

et

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha_1 &= -\sin a \sin\varepsilon, \\ \cos\alpha_2 &= \sin a \cos\varepsilon, \end{aligned} \right.$$

qui lient les angles $\beta_1, \beta_2, \beta_3, a, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ d'une part, et les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, \varepsilon$ d'autre part.

En observant que la projection de S sur l'axe OZ est nulle, et en considérant chacune des trois projections de φ_n sur les trois axes OX, OY, OZ comme la somme

des deux projections de S et de S_1 respectivement sur les mêmes trois axes OX, OY, OZ, nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi_n \cos\delta_1 = S\cos\varepsilon + S_1 \cos\alpha_1, \\ \varphi_n \cos\delta_2 = S\sin\varepsilon + S_1 \cos\alpha_2, \\ \varphi_n \cos\delta_3 = S_1 \cos\alpha_3 = S_1 \cos a, \end{cases}$$

qui servent à déterminer les angles δ_1, δ_2, δ_3. De ces équations (6), on tire

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos\delta_1 = \dfrac{S\cos\varepsilon + S_1\cos\alpha_1}{\varphi_n} = \dfrac{S\cos\varepsilon - S_1 \sin a \sin\varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos\delta_2 = \dfrac{S\sin\varepsilon + S_1\cos\alpha_2}{\varphi_n} = \dfrac{S\sin\varepsilon + S_1 \sin a \cos\varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos\delta_3 = \dfrac{S_1\cos a}{\varphi_n} = \dfrac{S_1 \omega r}{\varphi_n\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}. \end{cases}$$

Tout cela posé, il est facile d'obtenir l'expression de l'accélération normale pour le cas le plus général. En effet, comme S est égal à

$$(8)\qquad S = X\frac{x}{d} + Y\frac{y}{d},$$

il ne reste qu'à déterminer S_1.

En considérant la projection de l'accélération totale φ sur l'axe OZ comme la somme des deux projections de φ_n et de φ_t sur le même axe OZ, nous aurons

$$(9)\qquad \varphi_n \cos\delta_3 + \varphi_t \cos\beta_3 = Z.$$

Or, $\varphi_n \cos\delta_3 = S_1 \cos a$, $\cos\beta_3 = \sin a$, l'égalité (9) donnera

$$(10)\qquad S_1 \cos a = Z - \sin a\, \varphi_t.$$

Ayant égard à ce que l'accélération tangentielle φ_t est

égale à

(11) $$\varphi_t = X\cos\beta_1 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\beta_3,$$

et, en substituant dans l'égalité (10) cette valeur φ_t, et les valeurs $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$, données par les formules (4), nous obtiendrons, toutes réductions faites,

(12) $$S_1 = Z\cos a - W\sin a,$$

où la quantité W, étant la projection de X et de Y sur la tangente MF_1, est égale à

(13) $$W = X\cos\gamma_1 + Y\cos\gamma_2.$$

Si l'on compare nos formules (2), (8) et (12) avec les formules de M. H. Resal (9), (10), et celle qu'on lit à la dernière ligne de la page 239 de son Mémoire cité, on conclura que M. H. Resal pose $S_1 = Z\cos a$. Or il est évident que cette dernière égalité aura lieu dans le seul cas où le point A se trouve sur la droite ME, c'est-à-dire où l'accélération totale φ, représentée par MC, rencontre DB parallèle à AC, et, par conséquent, rencontre aussi l'axe instantané OZ. C'est ce qu'il fallait démontrer.

D'après nos formules (7), il est facile de voir comment il faut corriger les formules données par M. H. Resal pour $\cos\delta_1$, $\cos\delta_2$, $\cos\delta_3$, qu'il désigne respectivement par $\cos(\rho, x)$, $\cos(\rho, y)$, $\cos(\rho, z)$. De plus, il est à observer que S_1 (12) se réduit à Z dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; car $\sin a$, étant multiplicateur de W, est proportionnel à la vitesse L, qui est nulle dans ce cas particulier; alors le radical $\sqrt{S^2 + S_1^2}$ se réduit à $\sqrt{S^2 + Z^2}$, qui, comme l'on sait, exprime l'accélération normale dans le cas de la rotation autour d'un centre fixe.

M. Schell, dans son savant Ouvrage : *Theorie der Bewegung und der Kräfte* (p. 420-421), détermine

l'accélération normale, mais obtient pour cette accélération une expression incorrecte, par la seule raison qu'il commet une erreur, ou plutôt un *erratum*, qui consiste dans la fausseté de l'égalité suivante :

$$W \cos\left(\frac{\pi}{2} + tt'\right) = -W \cos(tt').$$

En introduisant cette erreur dans la détermination de S_1, il obtient pour φ_n une expression qui ne se réduit pas à l'expression de l'accélération normale dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; car, $\cos(tt')$ étant proportionnel à ωr, le membre multiplié par W, dans l'expression générale de φ_n donnée par M. Schell, ne s'évanouit pas, tandis que $-\sin(tt')$, qui est égal à $\cos\left(\frac{\pi}{2} + tt'\right)$, est proportionnel à la vitesse de glissement, et cette vitesse est nulle dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; par conséquent, en ajoutant le produit $-W\sin(tt')$ à telle partie de l'accélération S_1 qui forme la projection de Z sur la direction du même S_1 et qui est égale à $Z\cos a$, nous aurons pour S_1 l'expression qui, comme nous venons de le voir dans le cas du mouvement autour d'un point fixe, se réduit simplement à Z.

Il est juste d'ajouter ici encore la remarque suivante : M. Schell, pour le cosinus de l'angle que forme l'accélération normale avec l'axe instantané, et qu'il désigne par μ, donne (p. 421) l'expression

$$\cos\mu = \frac{T \sin\alpha}{\sqrt{r^2\omega^2 + T^2}},$$

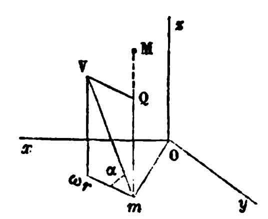
qui contient une erreur analogue à celle qui se trouve dans la formule de M. H. Resal pour $\cos(\rho, z)$ (p. 241). En effet, M. Schell, dans l'expression que nous venons

de citer, représente par T la vitesse de glissement et par α l'angle dont la tangente est égale à $\frac{S_1}{S}$, et dont le sinus, par conséquent, est égal à $\frac{S_1}{\sqrt{S^2+S_1^2}} = \frac{S_1}{\varphi_n}$; de sorte que, d'après M. Schell, $\cos\mu = \frac{S_1}{\varphi_n} \frac{T}{\sqrt{\omega^2 r^2 + T^2}}$, tandis que, réellement, d'après la troisième de nos formules (7),

$$\cos\mu = \frac{S_1}{\varphi_n} \frac{\omega r}{\sqrt{r^2\omega^2 + T^2}}.$$

Note de M. Resal. — L'erreur signalée par M. Sabinine dans l'expression générale de l'accélération normale d'un point d'un système invariable, que j'ai donnée autrefois dans le *Journal de l'École Polytechnique*, est tout à fait matérielle et peut se réparer immédiatement sans calcul.

Fig. 2.



Soient (*fig.* 2)

m la projection du point M d'un système invariable,

r la distance Om,

ω, Q la rotation instantanée et la vitesse de glissement,

V la vitesse de M ou la résultante de Q et de ωr,

X, Y, Z les composantes de l'accélération de ce point parallèles aux axes,

α l'angle de V avec ωr.

Suivant r, on a l'accélération

$$X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r}$$

qui est normale à V.

L'accélération Z donne

$$Z \cos a$$

perpendiculaire à V dans le plan de ωr et de Q.

Mais, suivant ωr, on a aussi l'accélération

$$Y\frac{x}{r} - X\frac{y}{r},$$

qui donne suivant $Z \cos a$ la composante

$$\left(Y\frac{x}{r} - X\frac{y}{r}\right)\sin a,$$

et c'est précisément celle qui a été omise; de sorte que l'on a

$$Z \cos a - \left(Y\frac{x}{r} - X\frac{y}{r}\right)\sin a,$$

au lieu de $Z \cos a$.

Mais cette omission ne touche pas à la partie principale du Mémoire, qui avait surtout pour objet de déterminer la forme des fonctions X, Y, Z.

NOTE SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA THÉORIE DES MOMENTS DES FORCES;

Par M. H. DURRANDE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

---

1. Je ne sais si l'on a remarqué l'analogie frappante qui existe entre les théorèmes bien connus relatifs aux moments des forces et les propriétés les plus élémentaires des déterminants. On pourrait dire que les déterminants du second et du troisième degré sont les *images analytiques* des moments d'une force par rapport à un point et par rapport à un axe.

On voit, par exemple, immédiatement que, pour l'observateur placé suivant l'axe des Z, ayant l'axe des X à sa gauche, l'axe des Y à sa droite, le moment, par rapport à l'origine, d'une force (X, Y) située dans le plan des XY, et passant par un point (x, y) de ce plan, est représenté en grandeur et en signe par le déterminant

du second degré

$$\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix},$$

dans lequel on peut considérer X, Y comme les coordonnées d'un point; car ce déterminant est bien l'*image analytique* du parallélogramme ayant pour base la force et pour hauteur sa distance à l'origine, ce qui n'est autre chose que le moment.

2. Si l'on considère plusieurs forces situées dans le plan des XY, et concourant au même point (x, y), on aura, pour la somme de leurs moments par rapport à l'origine,

$$\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ X' & Y' \end{vmatrix} + \ldots = \begin{vmatrix} x & y \\ \Sigma X & \Sigma Y \end{vmatrix},$$

en vertu d'une des relations les plus élémentaires des déterminants. Or la force $(\Sigma X, \Sigma Y)$ est la résultante des forces données, et l'on conclut de là le théorème fondamental de la théorie des moments par rapport à un point.

3. On verra ensuite, avec la même facilité, que le moment d'une force (X, Y, Z), située d'une manière quelconque dans l'espace, par rapport à un axe passant par l'origine, de direction (λ, μ, ν), est en grandeur et en signe

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix},$$

(x, y, z) désignant encore les coordonnées d'un point quelconque pris sur la direction de la force.

Ce mode de représentation des moments s'offre assez

naturellement à l'esprit lorsqu'on se souvient que le déterminant du second degré peut être considéré comme l'aire du parallélogramme ou le double de celle du triangle, et le déterminant du troisième degré comme le volume du parallélépipède ou six fois le volume du tétraèdre. Or, de même que le moment d'une force par rapport à un point équivaut à l'aire d'un parallélogramme, de même le moment, par rapport à un axe, équivaut à six fois le volume du tétraèdre ayant son sommet à l'origine, et pour arêtes, une longueur égale à l'unité prise sur l'axe des moments, la distance du point (x, y, z) à l'origine, et enfin une droite égale et parallèle à la force donnée menée par l'origine.

Je n'entre, bien entendu, dans aucun détail, ne voulant pas refaire ici une théorie des moments, que le lecteur fera bien lui-même d'après ces rapides indications. Je veux seulement montrer, par une application, avec quelle facilité certains théorèmes sur les moments se déduisent de transformations immédiates exécutées sur les déterminants qui les représentent.

4. Considérons deux forces quelconques $\begin{pmatrix} X, Y, Z \\ x, y, z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} X', Y', Z' \\ x', y', z' \end{pmatrix}$, et formons la somme de leurs moments par rapport à la résultante de deux forces égales et parallèles menées par un point quelconque pris comme origine, c'est-à-dire par rapport à leur résultante de translation; on aura, pour la somme de ces moments, en remarquant que les cosinus des angles qui donnent la direction de la résultante sont $\frac{\Sigma X}{R}$, $\frac{\Sigma Y}{R}$, $\frac{\Sigma Z}{R}$,

$$\frac{1}{R}\left\{\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ X' & Y' & Z' \\ \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \end{vmatrix}\right\}.$$

En remplaçant ΣX par $X + X',\ldots$, décomposant chaque déterminant en déterminants partiels et supprimant ceux qui sont nuls, il reste, après réduction,

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} x - x' & y - y' & z - z' \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant représente six fois le volume du tétraèdre ayant pour arêtes opposées les deux forces données (X, Y, Z), (X', Y', Z').

Donc *la somme des moments de deux forces quelconques par rapport à un axe parallèle à leur résultante de translation est indépendante de la position de cet axe et égale à six fois le volume du tétraèdre ayant ces forces pour arêtes opposées, divisé par la grandeur de la résultante.*

5. Ce théorème se généralise ensuite de la manière suivante :

Considérons un groupe de n forces appliquées à un solide invariable

$$\begin{pmatrix} X, Y, Z \\ x, y, z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X', Y', Z' \\ x', y', z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X'', Y'', Z'' \\ x'', y'', z'' \end{pmatrix}, \ldots;$$

la somme de leurs moments par rapport à leur résultante de translation est

$$\frac{1}{R}\sum\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \end{vmatrix};$$

en opérant comme dans le cas de deux forces, il vient

$$\frac{1}{R}\sum\begin{vmatrix} x - x' & y - y' & z - z' \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}.$$

Donc *la somme des moments de n forces appliquées à un corps solide par rapport à un axe parallèle à leur résultante de translation est indépendante de la position de cet axe et égale à six fois la somme des volumes des* $\frac{n(n-1)}{2}$ *tétraèdres construits sur les forces prises deux à deux comme arêtes opposées, divisée par la grandeur de la résultante.*

Maintenant, si l'on observe que la substitution à un groupe de forces d'un autre groupe équivalent n'altère en rien la somme de leurs moments, puisque cela revient à introduire des forces dont les moments par rapport à un axe quelconque sont égaux et de signes contraires, on en conclura que :

De quelque manière que l'on réduise un système de n forces à deux résultantes, le volume du tétraèdre construit sur ces dernières comme arêtes opposées est constant et équivalent à la somme des volumes des $\frac{n(n-1)}{2}$ *tétraèdres construits sur les forces données prises deux à deux comme arêtes opposées.*

Ces théorèmes, dus, je crois, à M. Chasles, sont bien connus; mais j'ignore si l'on a songé à les démontrer par les considérations précédentes, qui me paraissent très-simples.

SUR LA DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE;

PAR M. J. WAILLE.

Pour obtenir cette formule, il suffit d'écrire que le carré de la surface du triangle qui a pour sommet le point donné et pour base une portion quelconque de la

droite est égal à la somme des carrés de ses projections sur les trois plans coordonnés.

En effet, si l'on désigne par l une longueur arbitraire portée sur la droite, les projections de cette ligne sur les trois plans des xz, des yz et des xy sont, en conservant les notations ordinaires,

$$\frac{l\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \frac{l\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \frac{l\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

On connaît les expressions des perpendiculaires abaissées des projections du point sur les projections de l : on aura donc, en désignant par δ la perpendiculaire cherchée et en appliquant le théorème énoncé, l'équation

$$\begin{aligned}\frac{l^2\delta^2}{4} = &\frac{l^2}{4}\frac{a^2+1}{a^2+b^2+1}\frac{(x-az-p)^2}{a^2+1}\\ &+\frac{l^2}{4}\frac{b^2+1}{a^2+b^2+1}\frac{(y-bz-q)^2}{b^2+1}\\ &+\frac{l^2}{4}\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}\frac{[a(y-q)-b(x-p)]^2}{a^2+b^2},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit la valeur de δ.

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES ASYMPTOTES DANS LES INTERSECTIONS DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. J. CARON,

Directeur des travaux graphiques à l'École Normale supérieure.

Pour construire l'intersection de deux surfaces du second degré, on coupe ces deux surfaces par une troisième surface variable rencontrant les deux premières suivant deux courbes. Les points communs à ces deux courbes appartiennent aussi à l'intersection.

On emploie de préférence, comme surfaces auxiliaires, des plans. La direction de ces plans n'est pas arbitraire. Il convient en effet, pour simplifier les constructions, d'employer, comme plans sécants, des plans donnant dans les deux surfaces des courbes homothétiques.

Je supposerai donc qu'on ait trouvé un plan A donnant dans les deux surfaces des courbes homothétiques.

Je supposerai aussi que ces courbes homothétiques soient du genre hyperbole ou du genre ellipse, en me réservant d'examiner à part le cas où elles seraient du genre parabole.

Soit A_1 l'un de ces plans; il coupe la surface S suivant une conique c et la surface S' suivant une deuxième conique c', homothétique de la première.

Les deux coniques c et c' se rencontrent en deux points M, N de l'intersection I, les deux autres points étant à l'infini.

Ainsi un plan quelconque parallèle au plan A ne coupe l'intersection I qu'en deux points, les deux autres étant constamment à l'infini. C'est pour cette raison que je donnerai à la direction des plans A le nom de direction asymptotique de la courbe I.

Quand le plan A se déplace, les deux points M et N décrivent la courbe I. Voyons ce qui arrive quand ces points s'éloignent à l'infini.

Ces deux points, pour une position particulière du plan sécant A, peuvent s'éloigner à l'infini, soit isolément, soit simultanément. Nous avons donc deux cas à examiner.

1° *L'un des points* M *et* N *s'éloigne seul à l'infini.* — Pour que deux courbes homothétiques du second degré, et à centre, se coupent en un seul point à distance finie, il faut et il suffit que ces deux courbes soient du genre hyperbole, et qu'elles aient une asymptote commune.

Cherchons donc le plan A donnant deux coniques c et c' ayant une asymptote commune, et déterminons la position de cette asymptote commune.

Soit α ou α' la direction commune d'une des asymptotes des courbes c et c', et soit de plus α_1 ou α'_1 la position de l'asymptote commune.

Pour trouver cette asymptote, je remarque qu'elle passe dans toutes ces positions par le centre de la courbe c ou c' à laquelle elle appartient.

Or le lieu du centre de la courbe c est le diamètre conjugué ax du plan A dans la surface S; de même le lieu du centre de la courbe c' est le diamètre conjugué $a'x'$ du plan A dans la surface S'.

Donc l'asymptote commune α_1 ou α'_1 est assujettie à rencontrer les deux diamètres conjugués ax, $a'x'$. Elle s'obtient par conséquent en menant une parallèle à l'une quelconque des asymptotes de la courbe c ou c' s'appuyant sur les diamètres conjugués du plan A dans les deux surfaces.

Je dis maintenant que cette asymptote commune est aussi une asymptote de l'intersection I. Pour le faire voir, il suffit de montrer que cette asymptote commune n'est autre chose que l'intersection des plans tangents à l'infini aux deux surfaces S, S', les points de contact étant sur les génératrices des deux surfaces qui sont parallèles à α ou α_1, et par suite parallèles entre elles.

En effet, le plan tangent au cône asymptote Γ de la surface S, le long de la génératrice α_2 de ce cône parallèle à α ou α', contient le diamètre conjugué ax du plan A qui est parallèle à α_2 (*). Par conséquent, toute droite

(*) Le diamètre conjugué d'un plan A, par rapport à un cône, n'est autre chose que l'intersection des plans tangents au cône le long des génératrices α_2, β_2 du cône contenues dans le plan parallèle au plan A mené par le sommet.

du plan tangent, et en particulier l'asymptote, rencontre le diamètre conjugué ax.

De même, toute droite du plan tangent au cône asymptote Γ' de la surface S' le long de la génératrice α'_2, rencontre le diamètre conjugué $a'x'$ du plan A par rapport à cette surface.

Donc l'asymptote à l'intersection I étant l'intersection de ces deux plans tangents rencontre simultanément les diamètres ax, $a'x'$. De plus, les deux plans tangents étant menés respectivement par les deux droites α_2, α'_2 qui sont parallèles, leur intersection est aussi parallèle à ces droites, et par suite elle coïncide avec l'asymptote commune α_1 ou α'_1 trouvée précédemment.

2° *Les deux points* M *et* N *s'éloignent simultanément à l'infini.* — Pour que deux courbes homothétiques du second degré et à centre ne se rencontrent en aucun point à distance finie, il faut et il suffit que ces deux courbes aient même centre.

Supposons donc que les deux diamètres conjugués ax, $a'x'$ se rencontrent en un point ω. Le plan A_1 mené par ce point coupera les deux surfaces suivant deux coniques c, c' ayant même centre. La courbe I est donc rencontrée par ce plan A_1 en quatre points qui sont tous les quatre à l'infini.

Si les deux courbes c et c' sont du genre hyperbole, les points M et N qui se sont éloignés à l'infini donnent des branches de courbe réelles. L'intersection I a alors deux asymptotes réelles qui ne sont autre chose que les parallèles aux deux asymptotes des courbes c et c' menées par le point ω.

Au contraire, si les deux courbes c et c' sont du genre ellipse, les points M et N, en s'éloignant à l'infini, deviennent imaginaires, et le plan A_1 mené par le point ω est

un plan asymptotique à une partie imaginaire de l'intersection I.

Je m'arrêterai un instant à l'examen de ce dernier plan asymptotique ; car il conduit à la construction d'une asymptote d'un genre particulier, et qu'on ne pouvait trouver par la méthode ordinaire.

Les hypothèses sont donc les suivantes :

1° Le plan A coupe les deux surfaces S, S' suivant deux coniques c, c' homothétiques.

2° Les deux diamètres ax, $a'x'$ conjugués du plan A dans les deux surfaces se rencontrent, ou plutôt déterminent un plan $\omega axa'x'$.

Ce plan $\omega axa'x'$ rencontre le plan A suivant une droite pz qui a pour conjuguée, par rapport aux deux coniques c, c', une même droite py.

Nous voyons donc que les deux surfaces S, S' ont un même plan diamétral $\omega axa'x'$ conjugué de la direction py. Par conséquent, la projection de l'intersection I parallèlement à py sur le plan diamétral commun $\omega axa'x'$ est une courbe du second degré. Cette courbe du second degré i ne convient pas tout entière comme projection de l'intersection.

Si les coniques c, c' sont du genre hyperbole, la projection i a une branche infinie projection de deux branches infinies et réelles de l'intersection.

Au contraire, si les deux coniques c, c' sont du genre ellipse, la projection i a encore une branche infinie dont pz est l'asymptote, mais qui est alors la projection d'une partie imaginaire de l'intersection I.

La méthode des plans tangents à l'infini donne bien l'asymptote dans le premier cas, mais elle ne peut la donner dans le second.

Cette méthode des diamètres conjugués pour la détermination des asymptotes est donc plus générale que celle

de plans tangents à l'infini, et de plus elle donne souvent lieu à des constructions beaucoup plus simples.

Le cas qui nous occupe se présente fréquemment. Ainsi on aura à appliquer la méthode que je donne ici, dans le cas de l'intersection de deux surfaces de révolution du second degré, dont les axes sont dans un même plan parallèle au plan vertical, et plus généralement encore, dans tous les cas d'intersection de deux surfaces du second degré qui ont un plan diamétral commun (qui peut être un plan diamétral principal), correspondant à une même direction de cordes perpendiculaires à l'un des plans de projection.

Je vais examiner maintenant le cas où les sections par le plan A sont du genre parabole.

Pour que deux paraboles homothétiques (c'est-à-dire dont les axes sont parallèles) se coupent en un seul point à distance finie, il faut et il suffit : 1° qu'elles soient dirigées dans le même sens ; 2° qu'elles soient égales.

On déterminera donc le plan A_1 de manière à lui faire couper les deux surfaces suivant deux paraboles égales. Si ces deux paraboles sont de même sens, elles seront asymptotes entre elles, et en même temps asymptotes à l'intersection I. Cette intersection sautera d'une branche des paraboles à l'autre branche, le plan sécant se déplaçant en passant par la position A_1.

Nous voyons donc que, dans ce cas, l'intersection aura deux branches paraboliques asymptotes de chaque branche des paraboles c, c' contenues dans le plan A_1.

La projection de l'intersection sur un plan perpendiculaire au plan A_1, pris par exemple pour plan horizontal, a une asymptote parallèle à la ligne de terre, avec un point de rebroussement à l'infini, ce point appartenant aux deux contours apparents en projection verticale.

Si les deux paraboles du plan A_1 sont égales, de même sens, et de plus ont même axe, les deux points M et N s'éloigneront simultanément à l'infini.

Pour trouver la position du plan A_1, nous nous servirons des théorèmes suivants :

1° *Les sections d'un cylindre par des plans parallèles sont égales.*

2° *Les sections paraboliques d'un paraboloïde par des plans parallèles sont égales.*

3° *Les sections par un même plan d'un hyperboloïde et de son cône asymptote (ces sections étant des paraboles) sont égales.*

A l'aide de ces trois théorèmes, nous ramènerons la détermination du plan A_1 à la résolution des deux problèmes suivants :

1° Un plan A coupant un cône donné suivant une parabole, trouver un plan parallèle au plan A coupant le cône suivant une parabole égale à une parabole donnée.

2° Un plan A coupant deux cônes suivant deux paraboles ayant leurs axes parallèles, trouver un plan A_1 parallèle au plan A coupant les deux cônes suivant deux paraboles égales.

Solution du premier problème. — Je mène un plan tangent au cône parallèle au plan A, et dans ce plan je place la parabole donnée c, de manière qu'elle passe par le sommet du cône, et qu'elle ait son axe parallèle à la génératrice de contact. Cette parabole a pour tangente, au sommet du cône, une droite st. Par cette droite, je mène un second plan tangent au cône. Soit sb la génératrice de contact.

Si, par un point quelconque de la parabole c, je mène une parallèle à la droite sb, elle coupe le cône en un point m, et le plan mené par le point m parallèlement au

plan A coupe le cône suivant une parabole égale à la parabole c.

En effet, si l'on amène ces deux paraboles à être dans le même plan (par un transport parallèle à sb), on voit aisément qu'elles ont deux points communs avec une tangente en l'un de ces points communs, et les axes parallèles, ce qui fait quatre conditions communes.

On voit par là que le problème est toujours possible et n'admet qu'une seule solution, en tenant compte de la direction de la parabole c.

Solution du second problème. — Soient les deux cônes s, s' et les plans tangents A, A' parallèles ainsi que les deux génératrices de contact $s\alpha$, $s'\alpha'$.

Par le point s je mène dans le plan A deux droites arbitraires st, st_1, et par le point s' deux parallèles $s't'$, $s't'_1$.

Ces droites déterminent quatre plans tangents dont les génératrices de contact sont sb, sb_1 pour le premier cône, $s'b'$, $s'b'_1$ pour le second.

Je ferai remarquer tout d'abord que les plans sbb_1, $s'b'b'_1$ des génératrices de contact sont coupés par un plan A suivant deux droites parallèles.

En effet, ces droites sont les cordes de contact, par rapport à deux paraboles qui ont leurs axes parallèles, de deux systèmes de tangentes parallèles deux à deux (car les deux tangentes de la première parabole sont parallèles à st, st_1, et celles de la seconde à $s't$, $s't'_1$).

Soit A_1 le plan cherché, b, b_1, b', b'_1 les quatre points d'intersection du même plan avec les quatre génératrices de contact.

Si les deux paraboles sont égales, les deux cordes bb_1, $b'b'_1$ le sont aussi. La réciproque étant vraie, la question se ramène à la suivante : couper les deux faisceaux $sbsb_1$, $s'b's'b'_1$ par un plan A_1 parallèle au plan A, de manière que les cordes interceptées bb_1, $b'b'_1$ soient égales.

Pour résoudre ce dernier problème, je mène par les deux sommets s, s' et par un point quelconque de l'espace trois plans parallèles au plan A. Ces trois plans sont coupés par une droite quelconque en trois points σ, σ' et ω. Le troisième plan mené par le point quelconque ω détermine dans les deux faisceaux $sbsb_1$, $s'b's'b'_1$ deux cordes $dd_1, d'd'_1$. Je prends alors sur une droite quelconque du troisième plan passant par ω, et à partir du point ω, deux longueurs $\omega\delta$, $\omega\delta'$ dans le même sens, égales respectivement à $dd_1, d'd'_1$. Ceci fait, je joins $\sigma\delta, \sigma'\delta'$ qui se rencontrent au point β. Le plan parallèle au plan A mené par ce point β est le plan cherché A_1.

Nous avons donc toujours une solution et une seule.

Exemple. — Construire l'intersection de deux cônes ayant pour base, dans le plan horizontal, deux paraboles dont les axes sont parallèles.

QUESTIONS 1112, 1113, 1114, 1115 ET 1116

(voir même tome, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

1112. *Montrer que la développée de l'ellipse peut être considérée comme l'enveloppe d'ellipses concentriques et co-axales à la proposée.* (C. DE POLIGNAC.)

La développée de l'ellipse

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a, comme on sait, pour équation,

$$(2)\qquad \left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

en posant, pour abréger, $\frac{c^2}{a} = a_1$ et $\frac{c^2}{b} = b_1$.

Pour que les ellipses variables

(3) $$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

aient pour enveloppe la développée de la première, il est nécessaire que les paramètres α et β soient liés par une relation telle que, pour $\beta = 0$, $\alpha = \frac{c^2}{a}$, et, pour $\alpha = 0$, $\beta = \frac{c^2}{b}$. La relation la plus simple satisfaisant à cette condition est

(4) $$a\alpha + b\beta = c^2.$$

Différentiant les équations (3) et (4) par rapport à α et β, ajoutant les équations résultantes multipliées respectivement par λ et -1, et égalant séparément à zéro les coefficients de $d\alpha$ et de $d\beta$, on a

(5) $$\begin{cases} \lambda \frac{x^2}{\alpha^3} - a = 0, \\ \lambda \frac{y^2}{\beta^3} - b = 0. \end{cases}$$

Ajoutant ces équations multipliées respectivement par α et λ, et ayant égard aux équations (3) et (4), il vient

$$\lambda - c^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = c^2.$$

Les équations (5) donnent ensuite

$$\frac{x^2}{\alpha^3} = \frac{a}{c^2} = \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{y^2}{\beta^3} = \frac{b}{c^2} = \frac{1}{b_1},$$

d'où

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{y^2}{\beta^2} = \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ces valeurs, reportées dans l'équation (3), donnent, pour équation de l'enveloppe cherchée,

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

C'est précisément l'équation (2) de la développée de l'équation (1).

Note. — La même question a été résolue par MM. E. Laurens, professeur au lycée de Rouen; Poujade, professeur au lycée de Nice; Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne; A. Chervet, élève du lycée de Moulins.

1113. *Le rayon de courbure du point de l'ellipse, qui est égal au demi-diamètre conjugué de ce point, a son extrémité sur ce diamètre. Il est tangent au cercle concentrique à l'ellipse ayant la demi-différence des axes pour rayon.* (C. de Polignac.)

Soient O le centre de l'ellipse, M le point jouissant de la propriété énoncée, C le centre de courbure correspondant. Il faut prouver que le triangle OCM est rectangle en C, et que $OC = a - b$.

Soit ω le paramètre angulaire du point M,

$$OM = \sqrt{a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega},$$

le demi-diamètre conjugué $= \sqrt{a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega}$, et le rayon de courbure en $M = \dfrac{(a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}{ab}$.

On aura donc

$$\frac{(a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}{ab} = (a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega = ab.$$

On tire de là

$$\sin^2\omega = \frac{b}{a+b}, \quad \cos^2\omega = \frac{a}{a+b}.$$

On a donc

$$OM^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2,$$

$$CM^2 = \frac{a^2b+ab^2}{a+b} = ab,$$

$$OM^2 - CM^2 = (a-b)^2.$$

D'ailleurs l'équation de la normale en M étant

$$a\sin\omega\, x - b\cos\omega\, y = (a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega,$$

le carré de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette normale est

$$\frac{(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega} = \frac{(a-b)^2ab}{ab} = (a-b)^2.$$

Elle tombe donc au point C, qui appartient, par suite, au conjugué du demi-diamètre OM, et de plus le rayon de courbure est tangent à la circonférence décrite du centre de l'ellipse avec le rayon $a-b$ (*).

(*) Soient OX, OY les directions des axes $2a$, $2b$ de l'ellipse; DC le rayon de courbure en un point D de cette courbe; ADB la tangente en D, perpendiculaire à DC, et rencontrant en des points A, B les droites OX, OY.

On sait que le rayon de l'ellipse conjugué de OD est parallèle à la tangente ADB, et moyen géométrique entre les segments AD, DB. Donc, si le rayon de courbure DC est égal à ce rayon conjugué, le point C appartient nécessairement à la circonférence décrite sur AB comme diamètre. De plus, la droite CD prolongée rencontrant cette circonférence en un point C′, tel que DC′ = DC, si du point C′ on abaisse une perpendiculaire sur OD, on aura, d'après la proposition de Steiner, dont une démonstration géométrique a été donnée (t. X, 2ᵉ série, p. 462),

$$OH \times OD = a^2 + b^2,$$

d'où

$$OD \times DH = a^2 + b^2 - OD^2 = DC^2 = DC \times DC'.$$

L'égalité $OD \times DH = DC \times DC'$ montre que les quatre points O, H,

Note. — La même question a été résolue par MM. Abel Prétet, élève du collége Stanislas; Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne; Poujade, professeur au lycée de Nice; Louis Cauret, professeur au lycée du Mans; E. Laurens, professeur au lycée de Rouen; A. Tourrettes, surveillant général au lycée d'Albi; A. Chervet, élève du lycée de Moulins; Bance, maître répétiteur au lycée de Rouen; V. Jamet, élève du lycée de Bordeaux; Bourguet, à Nantes; H. Lez, à Lorrez.

1114. *Les cercles concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement la somme et la différence de ses axes, interceptent sur toute normale à l'ellipse des segments dont deux sont toujours égaux. En donner l'expression.* (C. DE POLIGNAC.)

1115. *Montrer que l'on peut tracer une infinité d'ellipses concentriques et co-axales à une ellipse donnée jouissant deux à deux de la même propriété. Les axes de l'ellipse peuvent être regardés comme deux ellipses (non correspondantes) de la série.*

(C. DE POLIGNAC.)

1116. *Deux ellipses quelconques de la série inter-*

C, C′ sont sur une même circonférence; donc l'angle OCC′ est droit et la droite OC est parallèle à ADB. Par conséquent, le point C appartient au diamètre conjugué de OD.

D'autre part, il résulte de la construction bien connue, qui détermine les axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués, que $OC = a - b$ et $OC' = a + b$; donc le rayon de courbure DC est tangent à la circonférence décrite du centre O de l'ellipse avec $(a - b)$ pour rayon. C. Q. F. D.

Remarque. — Soient OP une perpendiculaire menée du point O sur AB, et G l'intersection des diamètres OC′, AB; on aura

$$PG = \tfrac{1}{2} PD = \tfrac{1}{2} OC = \tfrac{1}{2}(a - b) \quad \text{et} \quad BG = \tfrac{1}{2} BA = \tfrac{1}{2} OC' = \tfrac{1}{2}(a + b);$$

il s'ensuit

$$BP = b, \quad PA = a, \quad \text{et} \quad OP = \sqrt{ab}, \quad DC = \sqrt{ab}.$$

La droite AB est le minimum des tangentes à l'ellipse comprises entre les axes de la courbe. (G.)



ceptent, sur toute normale à l'ellipse donnée, deux segments dont le rapport est constant.

(C. DE POLIGNAC.)

Les solutions de ces trois questions résultent immédiatement des théorèmes suivants, démontrés par M. Transon, dans les *Nouvelles Annales* :

1° *Si, sur la normale en chaque point d'une ellipse, on porte à partir de ce point, et de part et d'autre, des segments égaux à la moyenne géométrique des deux rayons focaux de ce point, les lieux des extrémités de ces segments sont les deux cercles décrits du centre de l'ellipse avec la demi-somme et la demi-différence des axes pour rayons* (*).

Ce théorème résout complétement la question 1114. J'en reproduis ici la démonstration, en faisant usage de la notation de M. Bellavitis.

Soient O le centre de l'ellipse, C et C' les deux foyers, Z un point quelconque de la courbe; représentons les droites OC, OC', OZ par c, $-c$ et z.

On aura, dans les triangles OCZ, OC'Z,

$$CZ \triangleq z - c, \quad C'Z \triangleq z + c.$$

La moyenne géométrique entre CZ et C'Z sera $\sqrt{z^2 - c^2}$, dirigée suivant la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs, c'est-à-dire suivant la normale.

Soient Y_1, Y_2 les extrémités des segments; désignons OY_1 et OY_2 par y_1 et y_2; on aura

$$y_1 \triangleq z + \sqrt{z^2 - c^2}, \quad y_2 \triangleq z - \sqrt{z^2 - c^2},$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{dy_1}{y_1} \triangleq \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad \frac{dy_2}{y_2} \triangleq \frac{dz}{-\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 5.

Or dz, dirigé suivant la tangente, fait avec la normale un angle droit; donc, d'après les principes du calcul directif (ou des équipollences), dy_1 fait aussi un angle droit avec y_1, et dy_2 fait un angle droit avec y_2. Les courbes décrites par les points Y_1 et Y_2 sont donc des circonférences concentriques à l'ellipse. En supposant le point Z à l'extrémité du petit axe, les segments deviennent égaux à a, d'où l'on voit que les rayons sont $a+b$ et $a-b$.

2° *Si, en chaque point d'une conique à centre et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la normale, on porte une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux rayons focaux relatifs à ce point, l'extrémité de cette longueur décrira une nouvelle conique concentrique à la première et de même genre qu'elle* (*).

Ce théorème résout les questions 1115 et 1116.

Pour chaque valeur du rapport, on obtient deux coniques correspondantes; si l'inclinaison sur la normale est nulle, toutes les coniques obtenues sont co-axales à la proposée. Les deux axes de celle-ci font partie de la *série* (*en les limitant toutefois aux sommets de la développée*); car les portions de normale comprises entre la courbe et les axes ont respectivement pour longueurs

$$N_x = \frac{b}{a}\sqrt{rr'}, \quad N_y = \frac{a}{b}\sqrt{rr'},$$

r et r' étant les deux rayons vecteurs : elles sont donc proportionnelles à $\sqrt{rr'}$.

Enfin, si $m\sqrt{rr'}$ et $m'\sqrt{rr'}$ sont les segments interceptés par deux ellipses quelconques de la série, ils sont dans le rapport constant $\frac{m}{m'}$.

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII, p. 5.

Note. — Les mêmes questions ont été résolue par MM. Bourguet, à Nantes; Poujade, professeur au lycée de Nice; A. Chervet, élève du lycée de Moulins. La question 1114 l'a été aussi par MM. A. Tourettes, surveillant général au lycée d'Albi; G. Gallard, élève du lycée de Rennes.

BIBLIOGRAPHIE.

Elementi di Geometria projettiva di *Luigi Cremona*, t. I, texte et planches (184-xliv). In-8; 1873. Prix : 3 fr. 50 c. (Pour la France, 4 fr., port compris.)

Ainsi que l'auteur le déclare dans sa Préface, cet Ouvrage n'a aucune prétention à l'originalité; les théorèmes, et souvent même leurs démonstrations et leur coordination en théories, appartiennent à d'autres Traités qu'il cite toujours consciencieusement. Le but de l'auteur a été seulement de faire un ouvrage *élémentaire*, un ouvrage accessible aux personnes qui n'ont étudié que les premiers livres de la Géométrie d'Euclide; un ouvrage enfin qui puisse servir de texte dans les écoles secondaires, même à des professeurs qui n'ont pas été élevés dans les doctrines de la science moderne. L'auteur a cherché en outre à allier l'étude des théories avec les constructions graphiques, et c'est pour cela qu'il a laissé prédominer les propriétés descriptives sur les propriétés métriques, sans toutefois négliger ces dernières. Dans ce sens, on peut dire que ses modèles ont dû être Poncelet, Staudt et Steiner, plutôt que Chasles et Möbius. Cet Ouvrage pourra donc servir à répandre rapidement, dans les écoles secondaires, la connaissance des méthodes modernes de la Géométrie, qui sont aussi nécessaires pour les spéculations abstraites que précieuses pour les applications techniques, ainsi que le prouve la *Statique graphique*. Et c'est précisément à cette diffusion et à ces applications que visent les nouveaux programmes de Mathématiques que le Ministère de l'Industrie du royaume d'Italie a introduits, en octobre 1871, dans les instituts secondaires qui dépendent de sa direction.

Ces prémisses expliquent l'ordre que l'auteur a suivi dans son

Ouvrage. Il commence par l'exposition des principes de la projection centrale et de la transformation homologique de Poncelet, et il en déduit la conception des éléments à distance infinie. Il définit, selon Steiner, les formes géométriques fondamentales et pose le principe de dualité comme principe absolu. Il adopte la définition de Zech pour la projectivité des formes, comme résultat de projections successives. D'après Staudt, il se sert de la propriété du quadrilatère complet pour définir les groupes harmoniques. Il introduit alors la théorie des rapports anharmoniques, et donne les constructions des formes projectives, en les faisant suivre de nombreux exercices.

Il établit la théorie de l'involution comme cas particulier de la projectivité de deux formes superposées. C'est à M. Chasles que l'auteur a emprunté le moyen très-simple de déduire la génération des coniques de la combinaison de deux formes projectives (*), et il en déduit les théorèmes de Pascal, de Brianchon, de Maclaurin, de Poncelet, de Desargues, etc., avec leurs nombreux corollaires et les constructions graphiques qui en découlent. L'auteur établit, d'après Bellavitis et Staudt, la conception des séries projectives de points sur une conique, et des propriétés de ces séries il déduit les constructions si élégantes et si simples données par Steiner pour les points doubles de deux divisions projectives (ou en involution) sur une droite. Puis viennent des applications très-nombreuses de la méthode que M. Chasles a nommée de *fausse position géométrique*, aux problèmes du second degré. L'auteur expose ensuite la théorie des pôles, des points réciproques et des triangles conjugués, et, comme cas particulier, celle du centre et des diamètres. Après un court chapitre sur les figures polaires réciproques, il donne un grand nombre de théorèmes et de problèmes, pour la majeure partie traités, quelques-uns seulement proposés comme exercices : parmi lesquels le théorème de Carnot, les propriétés de

(*) Par une méprise qui est intervenue dans la transcription du manuscrit, les démonstrations du n° 114 sont restées incomplètes; elles doivent être complétées comme dans le *Traité des Sections coniques*, nos 8 et 9.

l'hyperbole équilatère, la construction de M. Chasles pour la trisection de l'angle, la description organique des coniques de Newton, etc.

Le tome II de cet Ouvrage contiendra les propriétés focales des coniques, la théorie des cônes du second degré et des figures sur la sphère, et les principes de la Géométrie analytique d'après les méthodes modernes (coordonnées projectives).

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres; par *Joseph Graindorge*. Paris, Gauthier-Villars. In-8°; 1872. Prix : 7 fr. 50 c.

Ce Mémoire est, dit l'auteur, divisé en deux Parties : dans la première, je traite les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Je n'ai pas cru devoir parler de la méthode de Cauchy, parce qu'elle me paraît suffisamment développée dans les travaux de M. Serret. J'ai adopté la méthode de Jacobi, en la modifiant d'après les travaux de M. Boole et de Bour. J'ai appliqué cette méthode à différents exemples qui en montrent l'utilité; j'ai aussi traité plusieurs applications d'intégration d'équations simultanées à plusieurs variables.

Je n'ai pas exposé la théorie de l'intégration des équations de la Dynamique. Elle serait ici superflue : à la rigueur, elle n'y doit occuper qu'une place historique (*).

Dans la seconde Partie, je me suis occupé des équations du second ordre : j'y ai développé surtout les méthodes de Monge et d'Ampère, que j'ai appliquées à différents cas qui avaient échappé à ces géomètres. En traitant la méthode d'Ampère, j'ai simplifié la notation qu'il a employée dans ses deux Mémoires. J'ai aussi donné quelques détails sur les méthodes de Laplace et de Legendre, sans insister cependant sur la dernière.

Dans l'exposé de la méthode de Laplace, j'ai fait usage des

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*. — Voir aussi mon *Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique*. — Bour, *Mémoires des Savants étrangers*. — Gilbert, *Sur l'intégration des équations de la Dynamique* (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*; 1864).



simplifications que j'ai apportées à la méthode de Monge. J'ai donné de nombreux exemples des théories de Monge et d'Ampère, en appliquant la méthode de Jacobi aux équations du premier ordre, auxquelles j'ai ramené le problème. Je suis ainsi parvenu, chaque fois, à simplifier considérablement les calculs pénibles et les transformations nombreuses qu'avaient dû faire Monge, Legendre et Ampère.

La première Partie de mon Mémoire était déjà très-avancée, lorsque j'ai eu connaissance du Mémoire de M. Imschenetsky, professeur à l'Université de Kazan, sur la même question, Mémoire que M. Houël venait de traduire (*); j'y ai puisé différents renseignements très-utiles sur les équations du premier ordre. Je suis en outre parvenu à me procurer, grâce à l'obligeance de M. Imschenetsky, l'original russe d'un Mémoire publié par cet auteur sur les équations du second ordre (**). J'y ai trouvé, entre autres choses nouvelles, une généralisation, encore inconnue parmi nous, de la méthode de Laplace (***).

En outre, la théorie fondée par Ampère n'est pas générale : elle permet de trouver l'intégrale générale seulement dans certains cas particuliers. M. Imschenetsky a fait voir (****) que l'on peut, dans le cas général, obtenir l'intégrale primitive. La marche qu'il suit repose sur la méthode de *la variation des constantes arbitraires*. Il arrive ainsi à montrer l'existence d'un nombre illimité de transformations qui conservent à l'équation proposée son type primitif, ou la réduisent à une équation biordinale linéaire. Quoiqu'il dise lui-même, dans sa Préface, que la méthode d'Ampère est peu connue à cause de la difficulté qu'offre la lecture de ses deux Mémoires, il me paraît que l'on pouvait simplifier davantage la notation du savant français, et je pense en avoir donné la preuve.

(*) V. Imschenetsky, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, traduit du russe par Hoüel; Paris, 1869.

(**) V. Imschenetsky, *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes* (*Mémoires de l'Université de Kazan*, 1868).

(***) *Ibid.*, p. 49.

(****) *Ibid.*, p. 128.

TABLE DES MATIÈRES.

Juin 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Aug. 5

(Deuxième Série.) — Juillet 1873.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

JUILLET 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ PAR

M. GERONO,

Professeur de Mathématiques,

ET

M. CH. BRISSE,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1873 est en cours de publication.

On ne peut s'abonner que pour l'année entière.

L'abonnement est augmenté de 3 francs à partir de l'année 1869, et les prix pour les divers pays se trouvent dorénavant fixés ainsi qu'il suit :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Égypte, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Portugal, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége, Suède	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861), au lieu de 240 francs, 200 francs payables de la manière suivante : 100 francs comptant, et les 100 francs restants en un bon à trois mois à l'ordre de M. Gauthier-Villars, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes.

Les tomes X et XVI à XX (1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.

Les autres tomes de la première série se vendent séparément...... 12 fr.

La **DEUXIÈME SÉRIE**, commencée en 1862, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les tomes I à V (1862 à 1866) ne se vendent pas séparément.

Les tomes suivants de la deuxième série se vendent séparément... 15 fr.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ASYMPTOTES ET SUR CETTE LOCUTION :

« Les points situés à l'infini sur un plan sont en ligne droite »;

PAR M. ABEL TRANSON.

L'asymptote d'une branche infinie de courbe est la limite des positions occupées par une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment sur cette branche.

Je démontrerai d'abord cette propriété en la déduisant de l'équation de la tangente; j'en donnerai ensuite, au moyen de la *méthode des homogènes*, une autre démonstration, qui me procurera l'occasion d'attribuer à cette méthode une signification différente de la signification généralement admise, et surtout l'occasion d'apprécier la locution usuelle ci-dessus rappelée.

I.

L'équation d'une courbe de degré m étant

$$f(x,y)+\varphi(x,y)+\psi(x,y)+\ldots=0,$$

où $f, \varphi, \psi, \ldots$ sont des fonctions homogènes des degrés m, $m-1$, $m-2, \ldots$, et l'équation d'une asymptote étant

$$y=cx+d,$$

on sait : 1° que c est la limite vers laquelle tend $\frac{y}{x}$ pour $x=\infty$ lorsqu'on s'éloigne sur la branche de courbe correspondante, et est déterminé par l'équation

$$f(1,c)=0;$$

2° que d est, par rapport à la même branche et aussi pour $x = \infty$, la limite de $y - cx$, et que sa valeur est

$$d = -\frac{\varphi(1, c)}{f'_c(1, c)}.$$

Cela posé, l'équation de la tangente en un point quelconque (x', y') est la suivante :

$$y - y' = -\frac{\frac{df}{dx'}(x', y') + \frac{d\varphi}{dx'}(x', y') + \ldots}{\frac{df}{dy'}(x', y') + \frac{d\varphi}{dy'}(x', y') + \ldots}(x - x').$$

Le coefficient angulaire c' est déterminé par l'équation

$$c'\left[\frac{df}{dy'}(x', y') + \frac{d\varphi}{dy'}(x', y') + \ldots\right] + \frac{df}{dx'}(x', y') + \frac{d\varphi}{dx'}(x', y') + \ldots = 0,$$

où les fonctions entre parenthèses sont homogènes, leurs ordres d'homogénéité étant respectivement, selon leurs rangs successifs, $m - 1$, $m - 2, \ldots$; si donc on divise cette dernière équation par x'^{m-1}, elle pourra s'écrire

$$c'\left[\frac{df}{dy'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \frac{1}{x'}\frac{d\varphi}{dy'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \ldots\right] + \frac{df}{dx'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \frac{1}{x'}\frac{d\varphi}{dx'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \ldots = 0,$$

et, pour $x' = \infty$ et par suite $\frac{y'}{x'} = c$, elle se réduira à

$$(1) \qquad c'\frac{df}{dy'}(1, c) + \frac{df}{dx'}(1, c) = 0.$$

D'ailleurs, quels que soient x' et y', on a, en vertu du

théorème des fonctions homogènes,

$$y'\frac{df}{dy'}(x', y') + x'\frac{df}{dx'}(x', y') = mf(x', y'),$$

ou bien, en divisant par x'^m,

$$(2)\qquad \frac{y'}{x'}\frac{df}{dy'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \frac{df}{dx'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) = mf\left(1, \frac{y'}{x'}\right).$$

Or, si x' est infini, ce qui donne $\frac{y'}{x'} = c$ et en même temps $f(1, c) = 0$, l'équation (2) devient finalement

$$(3)\qquad c\frac{df}{dy'}(1, c) + \frac{df}{dx'}(1, c) = 0,$$

laquelle, comparée à (1), fait voir déjà qu'on a $c' = c$.

En second lieu, l'ordonnée de la tangente à l'origine est

$$d' = y' + \frac{x'\frac{df}{dx'} + x'\frac{d\varphi}{dx'} + \ldots}{\frac{df}{dy'} + \frac{d\varphi}{dy'} + \ldots},$$

que j'écris sous la forme

$$d' = \frac{\left(y'\frac{df}{dy'} + x'\frac{df}{dx'}\right) + \left(y'\frac{d\varphi}{dy'} + x'\frac{d\varphi}{dx'}\right) + \ldots}{\frac{df}{dy'} + \frac{d\varphi}{dy'} + \ldots},$$

ou encore sous la forme équivalente

$$(4)\qquad d' = \frac{m(f + \varphi + \psi + \ldots) - \varphi - 2\psi - \ldots}{f'_{y'}(x', y') + \varphi'_{y'}(x', y') + \ldots}.$$

Or, premièrement, on a $f + \varphi + \psi + \ldots = 0$, puisque le point (x', y') est sur la courbe; ensuite on peut écrire

le dénominateur sous la forme

$$(5)\qquad x'^{m-1}f'_{y'}\left(1,\frac{y'}{x'}\right)+x'^{m-2}\varphi'_{y'}\left(1,\frac{y'}{x'}\right)+\ldots,$$

et il est manifeste que les facteurs

$$f'_{y'}\left(1,\frac{y'}{x'}\right),\quad \varphi'_{y'}\left(1,\frac{y'}{x'}\right),\ldots$$

sont composés avec 1 et $\frac{y'}{x'}$, comme les termes correspondants le sont avec x' et y'; de sorte que la forme (5) doit être, pour l'exactitude des symboles, remplacée par

$$x'^{m-1}f'_{\frac{y'}{x'}}\left(1,\frac{y'}{x'}\right)+x'^{m-2}\varphi'_{\frac{y'}{x'}}\left(1,\frac{y'}{x'}\right)+\ldots.$$

Dès lors, en divisant haut et bas par x'^{m-1} l'expression de d', et passant ensuite aux limites $x'=\infty$ et $\frac{y'}{x'}=c$, il vient

$$d'=-\frac{\varphi(1,c)}{f'_c(1,c)};$$

par conséquent, enfin, $d'=d$, et la tangente en un point à l'infini coïncide exactement avec l'équation de l'asymptote.

II.

J'appliquerai maintenant à la même question ce qu'on appelle la *méthode des homogènes*.

Soit z une fonction de x et y, que je suppose d'abord du premier degré. Si, dans l'équation proposée

$$(\alpha)\qquad f+\varphi+\psi+\ldots=0,$$

on remplace x et y respectivement par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, il viendra

une autre équation représentant une autre courbe, savoir : l'équation

$$(\beta)\qquad f + z\varphi + z^2\psi + \ldots = 0,$$

qui est *homogène* par rapport aux lettres x, y, z.

On doit supposer d'ailleurs que l'équation (α) satisfait à ce qu'on a toujours appelé en Géométrie analytique la *loi de l'homogénéité*. Il faut donc, pour satisfaire à cette loi dans l'équation (β), que la fonction z soit *homogène et du degré zéro par rapport aux grandeurs linéaires*; et enfin, pour que la supposition $z = 1$ ramène la seconde équation (β) à l'équation primitive (α), il faut que z soit de la forme

$$z = 1 + ax + by,$$

a et b, qui sont respectivement $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, étant des paramètres inversement proportionnels à des grandeurs linéaires et susceptibles de s'annuler simultanément. On sait bien d'ailleurs que, lorsque a et b s'annulent effectivement, la droite $z = 0$ s'éloigne alors indéfiniment, et tous ses points (x, y) sont à l'infini.

Tout cela entendu, j'écris, pour abréger, l'équation (β) sous la forme

$$(\gamma)\qquad f + z\Phi = 0,$$

en supposant, par conséquent,

$$\Phi = \varphi + z\psi + z^2\chi + \ldots.$$

La tangente en un point quelconque x', y', z' de la courbe (β) ou (γ) est

$$(\delta)\qquad y - y' = -\frac{\frac{df}{dx'} + z'\frac{d\Phi}{dx'} + \Phi\frac{dz'}{dx'}}{\frac{df}{dy'} + z'\frac{d\Phi}{dy'} + \Phi\frac{dz'}{dy'}}(x - x').$$

Or si l'on admet que dans ces formules z' soit égal à l'unité, et en même temps que $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ (c'est-à-dire a et b) soient nuls, ce sera admettre que le point (x', y') est à la fois sur la courbe (α) et sur une droite située tout entière à l'infini. Mais alors, pour déterminer la tangente en ce point, c'est-à-dire l'asymptote, on retrouve les calculs du précédent paragraphe.

III.

Dans cette application de la *méthode des homogènes*, on suppose que a et b soient nuls en même temps sans que rien soit déterminé sur la valeur de leur rapport lorsqu'ils s'évanouissent. On est donc conduit à considérer les points situés à l'infini sur la courbe proposée, et qui donnent lieu à la recherche des asymptotes, comme étant sur une droite située elle-même à l'infini, et dont la direction, dépendant manifestement du rapport des paramètres a et b, est indéterminée.

D'ailleurs la même auxiliaire z pourrait être employée pour toute autre courbe dont les branches à l'infini n'auraient rien de commun avec la courbe particulière prise d'abord comme exemple ; pour toute courbe, en un mot, dont les points à l'infini seraient placés ailleurs que ceux, aussi à l'infini, de la première.

Voilà comment on a pu être conduit à dire que *les points situés à l'infini sur un plan sont en ligne droite ;* mais il faut bien se garder de prendre à la lettre une telle locution, qui ne doit être acceptée que comme une façon conventionnelle d'exprimer un résultat de calcul. Aussi bien, que serait-ce pour ces points à l'infini que d'être situés sur une ligne droite de *direction indéterminée ?* Et comment une ligne (droite ou courbe) pourrait-elle être

le lieu de points *situés à l'infini*, puisqu'on ne peut se représenter une ligne quelconque (droite ou courbe) que par les deux régions de l'en deçà et de l'au delà qu'elle sépare? Et que serait-ce que l'au delà de l'infini?

Une autre considération est bien propre à montrer qu'une telle locution ne peut être acceptée qu'en sens conventionnel et symbolique : c'est que l'emploi de la *méthode des homogènes*, pour la détermination des asymptotes, ne suppose pas que l'auxiliaire z soit une fonction du premier degré en x et y. Tous les calculs du paragraphe précédent subsisteront sans aucune complication, sans aucun changement, si l'on suppose que z soit une fonction quelconque, pourvu toutefois qu'elle soit d'ordre zéro par rapport aux grandeurs linéaires, et susceptible de se réduire à l'unité lorsque ses paramètres s'annulent; de sorte que, si on la suppose algébrique, elle doit être de la forme

$$1 + ax + by + cx^2 + dxy + fy^2 + \ldots.$$

Sous ces conditions, l'équation (δ) représentera de nouveau la tangente à la courbe (β) et deviendra aussi l'équation de l'asymptote à la courbe (α) quand on fera évanouir les paramètres a, b, c,....

Mais alors on serait donc fondé à dire que les points à l'infini de la courbe quelconque (α) et, par conséquent, que tous les points à l'infini du plan sont sur une courbe de la nature de celles que représente l'équation

$$\text{(A)} \qquad 0 = 1 + ax + by + cx^2 + dxy + fy^2 + \ldots ?$$

Oui, on y serait autorisé, ou tout au moins ce ne serait ni plus faux ni plus vrai que d'affirmer que ces points à l'infini sont en ligne droite.

Car si l'on peut dire de la droite

$$1 + ax + by = 0$$

qu'elle passe à l'infini lorsque a et b s'annulent, il y a même motif de dire que la courbe (A) passe à l'infini lorsque les paramètres a, b, c,... s'évanouissent. Pour rendre cela sensible, il suffit de former l'équation aux abscisses des rencontres de cette courbe avec la droite $y = mx$, et de supposer ensuite l'évanouissement des paramètres.

C'est ainsi, par exemple, qu'en faisant décroître indéfiniment les paramètres des équations

$$1 - a^2x^2 - a^2y^2 = 0, \quad 1 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0, \quad \ldots,$$

on trouverait à volonté que les points à l'infini sont sur un cercle, sur une ellipse, etc.

Le dernier mot de tout cela, c'est qu'il n'y a pas dans le calcul de véritables infinis, le mot *infini*, comme chacun le sait bien, n'ayant pas d'autre emploi, en Mathématiques, que de remplacer le mot *indéfini*, lequel ne peut lui-même correspondre qu'à des grandeurs *indéterminées*; et alors le lointain indéfini (indéterminé) d'un plan peut, en effet, être conçu sous telle forme qu'on veut, puisque ce n'est jamais *la fin du plan*.

J'ai déjà ailleurs critiqué cette locution, que *les points à l'infini d'un plan sont en ligne droite*; mais, comme je l'ai dit alors, s'il est vrai que l'infini absolu ne puisse jamais être l'objet du calcul, c'est toutefois un élément essentiel de l'intelligence, une idée aussi inhérente à l'esprit humain que les idées de cause et de substance; et je crois avoir montré que, sans vouloir faire entrer cette idée dans le calcul, il n'y a pas lieu, pour le géomètre, de la repousser indéfiniment; car elle s'offre à lui tout au moins dans le *postulatum* d'Euclide, et peut lui servir à transformer ce *postulatum* en un *théorème démontrable*. (*Voir* l'opuscule publié sous ce titre : *De l'Infini, ou*

Métaphysique et Géométrie; 1871. Paris, Gauthier-Villars.)

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 241);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

78. *Inscrire dans un cercle un polygone dont les côtés passent par des points donnés, ou soient de longueurs données.*

Il y a peu de problèmes de Géométrie élémentaire qui aient occupé les mathématiciens autant que celui consistant à inscrire dans un cercle un polygone dont les côtés passent par des points donnés. La solution suivante, publiée par moi en 1835, est peut-être plus simple que celles trouvées par les considérations synthétiques indirectes des anciens géomètres.

Soit qu'on veuille inscrire un quadrilatère XYZW (*fig.* 21), dont les trois côtés XY, YZ, ZW passent respectivement par les points donnés A, B, C, et dont le quatrième côté WX ait une longueur donnée. Soit OH le rayon d'inclinaison nulle. Posons

$$OX \triangleq \varepsilon^x OH,$$
$$OY \triangleq \varepsilon^y OH,$$
$$OZ \triangleq \varepsilon^z OH,$$
$$OW \triangleq \varepsilon^u OH.$$

La condition que XAY soit une ligne droite s'exprime (44) par

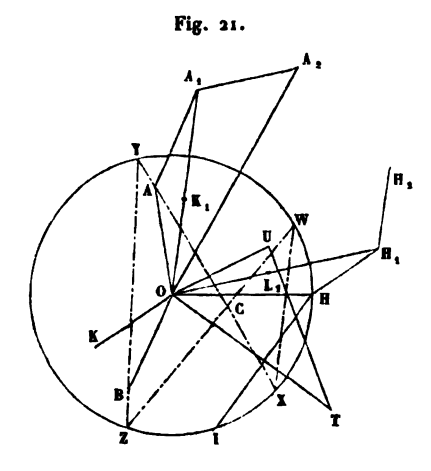
$$\varepsilon^x OH - OA \triangleq n(\varepsilon^y OH - OA).$$

Entre cette équipollence et sa conjuguée, nous éliminerons n et nous aurons

$$(\varepsilon^{x}\mathrm{OH}-\mathrm{OA})(\varepsilon^{-y}\mathrm{OH}-\mathrm{cj.OA}),$$
$$\doteq(\varepsilon^{-x}\mathrm{OH}-\mathrm{cj.OA})(\varepsilon^{y}\mathrm{OH}-\mathrm{OA}).$$

Cette équipollence devient identique (et il était facile de le prévoir) lorsque $y=x$; elle est donc divisible par

Fig. 21.



$\varepsilon^{x}-\varepsilon^{y}$, et donne par suite la relation suivante entre x et y:

(1) $$\varepsilon^{x}\doteq(\mathrm{OA}-\varepsilon^{y}\mathrm{OH}):(\mathrm{OH}-\varepsilon^{y}\mathrm{cj.OA}).$$

De même, les conditions que les côtés YZ, ZW passent par les points B et C fournissent les relations

(2) $$\varepsilon^{y}\doteq(\mathrm{OB}-\varepsilon^{z}\mathrm{OH}):(\mathrm{OH}-\varepsilon^{z}\mathrm{cj.OB}),$$

(3) $$\varepsilon^{z}\doteq(\mathrm{OC}-\varepsilon^{u}\mathrm{OH}):(\mathrm{OH}-\varepsilon^{u}\mathrm{cj.OC}).$$

Enfin, en appelant δ l'arc donné WX, on aura

(4) $$\varepsilon^{u}\doteq\varepsilon^{x-\delta}.$$

Par des substitutions successives effectuées dans les précédentes équipollences, nous obtiendrons une équipollence trinôme, qui nous permettra de déterminer l'inclinaison inconnue x, c'est-à-dire la position du point X.

Pour montrer comment il y aurait lieu d'opérer, quel que fût le nombre des côtés du polygone, nous formerons successivement les coefficients des équipollences résultant des substitutions indiquées. En substituant la valeur (2) dans (1), nous aurons

$$\varepsilon^{z} \doteq (\mathrm{OA}.\mathrm{OH} - \varepsilon^{z}\mathrm{OA}\,\mathrm{cj}.\mathrm{OB} - \mathrm{OB}.\mathrm{OH} + \varepsilon^{z}\mathrm{OH}.\mathrm{OH}):$$
$$(\mathrm{OH}.\mathrm{OH} - \varepsilon^{z}\mathrm{OH}\,\mathrm{cj}.\mathrm{OB} - \mathrm{cj}.\mathrm{OA}.\mathrm{OB} + \varepsilon^{z}\mathrm{cj}.\mathrm{OA}.\mathrm{OH})$$
$$\doteq (\mathrm{OA}_1 + \varepsilon^{z}\mathrm{OH}_1) : (\mathrm{cj}.\mathrm{OH}_1 + \varepsilon^{z}\mathrm{cj}.\mathrm{OA}_1),$$

pourvu que

$$\mathrm{OA}_1 \doteq \mathrm{OA} - \mathrm{OB},$$
$$\mathrm{OH}_1 \doteq \mathrm{OH} - \mathrm{OA}\,\mathrm{cj}.\mathrm{OB} : \mathrm{OH}.$$

De même

$$\varepsilon^{x} \doteq (\mathrm{OA}_2 - \varepsilon^{u}\mathrm{OH}_2) : (\mathrm{cj}.\mathrm{OH}_2 - \varepsilon^{u}\mathrm{cj}.\mathrm{OA}_2),$$

pourvu que

$$\mathrm{OA}_2 \doteq \mathrm{OA}_1 + \mathrm{OH}_1.\mathrm{OC} : \mathrm{OH}$$

et

$$\mathrm{OH}_2 \doteq \mathrm{OH}_1 + \mathrm{OA}_1\,\mathrm{cj}.\mathrm{OC} : \mathrm{OH}.$$

On continuerait ainsi de la même manière. Dans le cas que nous considérons, l'équipollence (4) nous donnera

$$\varepsilon^{2x-\delta}\mathrm{cj}.\mathrm{OA}_2 - \varepsilon^{x}\mathrm{cj}.\mathrm{OH}_2 + \varepsilon^{x-\delta}\mathrm{OH}_2 + \mathrm{OA}_2 \doteq 0,$$

ou, en multipliant par $\varepsilon^{\delta-x}\mathrm{OH} : \mathrm{cj}.\mathrm{OA}_2$,

$$\varepsilon^{x}\mathrm{OH} + \varepsilon^{\delta-x}\mathrm{OH}.\mathrm{OA}_2 : \mathrm{cj}.\mathrm{OA}_2$$
$$\doteq \mathrm{OH}(\mathrm{OH}_2 + \varepsilon^{\delta}\mathrm{cj}.\mathrm{OH}_2) : \mathrm{cj}.\mathrm{OA}_2 \doteq \mathrm{OU},$$

laquelle équipollence, comparée comme d'habitude (68) avec

$$\mathrm{OX} + \mathrm{XU} \doteq \mathrm{OU},$$

nous montre que le point X s'obtiendra en coupant le cercle donné par une autre circonférence égale, de centre U.

Les équipollences précédentes nous montrent clairement comment on trouve les points A_1, H_1,.... On mène AA_1 équipollente à BO; on construit le triangle OAK symétriquement semblable à OHB, et l'on mène $HH_1 \bumpeq KO$; on forme OH_1L_1 directement semblable à OHC, et OA_1K_1 inversement semblable au même triangle OHC; enfin l'on tire $A_1A_2 \bumpeq OL_1$, $H_1H_2 \bumpeq OK_1$. La corde HI étant égale au côté WX du quadrilatère cherché, on mène OT perpendiculaire à cette corde HI, et ayant par suite pour inclinaison $\frac{1}{2}\delta$, et on la coupe de manière que H_2T soit égal à OH_2. On aura

$$OT \bumpeq OH_2 + \varepsilon^{\delta}\,\mathrm{cj}.OH_2.$$

Enfin, construisant OTU inversement semblable à OA_2H, la droite qui divisera perpendiculairement OU en deux parties égales coupera la circonférence donnée au sommet X du quadrilatère demandé XAYBZCW.

Dans notre figure, la direction arbitraire OH a été prise suivant OC, de sorte que les triangles OHC, OH_1L_1, OA_1K_1 se sont trouvés réduits à trois droites divisées proportionnellement.

79. Notre solution présente l'avantage d'indiquer les calculs par lesquels on peut déterminer numériquement la position du sommet X.

Les deux solutions se réduisent à une seule lorsque OU est double du rayon du cercle, c'est-à-dire lorsque la direction de OT est telle que la projection de OH_2 sur cette droite soit égale à OA_2. Dans ce cas, le côté ZW est le plus grand de tous ceux des quadrilatères inscrits dans le cercle, et dont trois côtés passent par les points A, B, C.

80. Dans le n° 78, nous avons eu occasion d'exprimer la condition que trois points sont en ligne droite, par une équipollence ne contenant pas les coefficients arbitraires employés dans ce but au n° 44, et nous sommes parvenu à la formule désirée, au moyen de l'élimination, et par voie tout à fait directe. Ce n'est pas un des moindres avantages de la méthode des équipollences que de ne pas obliger de recourir à des formules précédemment démontrées, et de pouvoir présenter tous les résultats comme des conséquences faciles des principes fondamentaux.

Il ne sera pas inutile de fixer un instant l'attention sur les *fonctions alternées* ou *déterminants*, qui servent à établir la condition dont on s'occupe. Au n° 44, nous avons vu que, si

$$p\mathrm{OA} + q\mathrm{OB} + r\mathrm{OC} \doteq 0,$$

il faut, pour que les points A, B, C soient en ligne droite, que les trois coefficients numériques satisfassent à la relation

$$p + q + r \doteq 0.$$

Ajoutant à cette équipollence la conjuguée de la première

$$p\,\mathrm{cj.OA} + \ldots \doteq 0,$$

et remarquant qu'elles doivent exister simultanément, la théorie de l'élimination nous fait voir que : *la condition que* A, B, C *soient en ligne droite s'exprime en écrivant que la fonction alternée*

$$\begin{aligned}&\mathrm{OB\,cj.OC} - \mathrm{OC\,cj.OB}\\ &\quad + \mathrm{OC\,cj.OA} - \mathrm{OA\,cj.OC} + \mathrm{OA\,cj.OB} - \mathrm{OB\,cj.OA}\end{aligned}$$

est équipollente à zéro.

81. Cherchons maintenant *la condition nécessaire pour que les perpendiculaires aux extrémités des droites* OA′, OB′, OC′ *se rencontrent en un même point* M.

Nous avons (48)

$$\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{OA}' + \mathrm{A}'\mathrm{M} \bumpeq (1 + l\sqrt{})\mathrm{OA}' \bumpeq (1 + m\sqrt{})\mathrm{OB}' \bumpeq (1 + n\sqrt{})\mathrm{OC}'.$$

Entre ces équipollences et leurs conjuguées on élimine l, m, n, et l'on trouve que *la condition cherchée est exprimée ainsi, au moyen de la fonction alternée suivante :*

$$\begin{aligned} &\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OA}'\,(\mathrm{OB}'\,\mathrm{cj.OC}' - \mathrm{OC}'\,\mathrm{cj.OB}') \\ +\, &\mathrm{OB}'\,\mathrm{cj.OB}'\,(\mathrm{OC}'\,\mathrm{cj.OA}' - \mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OC}') \\ +\, &\mathrm{OC}'\,\mathrm{cj.OC}'\,(\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OB}' - \mathrm{OB}'\,\mathrm{cj.OA}') \bumpeq 0. \end{aligned}$$

La théorie de l'élimination nous montre que, par suite, nous pouvons avoir en même temps les trois équipollences

$$\begin{aligned} p'\,\mathrm{OA}' + q'\,\mathrm{OB}' + r'\,\mathrm{OC}' &\bumpeq 0, \\ p'\,\mathrm{cj.OA} + \ldots &\bumpeq 0, \\ p'\,\mathrm{gr}^2\mathrm{OA}' + q'\,\mathrm{gr}^2\mathrm{OB}' + r'\,\mathrm{gr}^2\mathrm{OC}' &\bumpeq 0. \end{aligned}$$

Dans la dernière (qui est aussi une équation), on a écrit $\mathrm{gr}^2\mathrm{OA}'$ (52) au lieu de $\mathrm{OA}'\mathrm{cj.OA}'$, etc.

De là, on pourrait tirer comme conséquence un théorème connu de Mécanique; sans insiter là-dessus, nous remarquerons que la fonction alternée de ce paragraphe se déduit de celle du paragraphe précédent, en supposant

$$\mathrm{OA}' \bumpeq 1 : \mathrm{cj.OA}, \ldots .$$

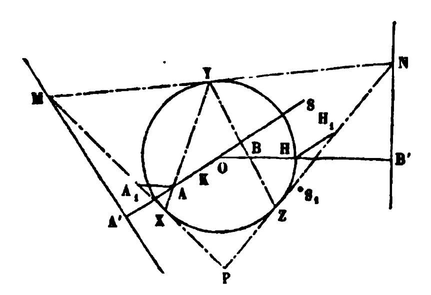
Il en résulte que, A, B, C étant en ligne droite, si par un point quelconque O on mène OA, OB, OC, et qu'on prenne sur ces droites les longueurs OA', ... inversement proportionnelles à OA, ..., les trois perpendiculaires élevées en A', B', C' se rencontreront en un même point, et réciproquement. C'est un des théorèmes fondamentaux de la *réciprocité*, en *transformation polaire* des figures.

82. Problème. — *Circonscrire à un cercle un poly-*

gone dont les angles aient leurs sommets situés sur des droites données ou soient de grandeurs données.

Les droites seront convenablement définies par les perpendiculaires OA′, OB′,... (*fig.* 22) abaissées sur elles

Fig. 22.



par le centre O du cercle donné, et les points de contact du triangle circonscrit se trouvent exprimés par

$$\mathrm{OX} \doteq \varepsilon^{x}\mathrm{OH}, \quad \mathrm{OY} \doteq \varepsilon^{y}\mathrm{OH}, \ldots,$$

OH étant le rayon pris pour origine des inclinaisons. La condition pour que les trois perpendiculaires élevées aux extrémités de OA′, OX, OY se rencontrent en un même point M a été donnée plus haut : c'est

$$\begin{aligned}&\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OA}'\,(\varepsilon^{x-y} - \varepsilon^{y-x})\\ &\quad + \mathrm{OH}(\varepsilon^{y}\,\mathrm{cj.OA}' - \varepsilon^{-y}\mathrm{OA}' + \varepsilon^{-x}\mathrm{OA}' - \varepsilon^{x}\,\mathrm{cj.OA}') \doteq 0.\end{aligned}$$

Cette équipollence devient identique (et il était facile de le prévoir), lorsque $x = y$; divisée par $\varepsilon^{x} - \varepsilon^{y}$, puis résolue par rapport à ε^{x}, elle donne

$$\varepsilon^{x} \doteq (\mathrm{OH.OA}' - \varepsilon^{y}\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OA}') : (\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OA}' - \varepsilon^{y}\mathrm{OH}\,\mathrm{cj.OA}'),$$

équipollence qui devient identique à celle (1) du n° 78, lorsqu'on pose

$$OA \bumpeq (OH)^2 : cj.OA',$$

si bien que la condition imposée aux tangentes en X, Y, de se rencontrer en un point de la droite A'M, est identique avec celle obligeant la corde XY à passer par le point A, située sur OA' de telle sorte que OA.OA' égale le carré du rayon (ce qui est très-connu dans la théorie des polaires). Déterminant de la même manière le point B de OB',..., nous réduirons le problème aux formules plus commodes du n° 78.

83. Si, par exemple, le triangle MNP, circonscrit au cercle, doit avoir deux sommets sur les droites A'M, B'N, et l'angle P maximum, nous déterminerons comme plus haut les deux points A, B; puis, menant le rayon OBH, nous diviserons OA en K, de la même manière que le rayon OH est coupé en B. Après cela, nous mènerons $AA_1 \bumpeq BO$, $HH_1 \bumpeq KO$; et, donnant à OS une direction telle que la projection de OH_1 sur cette droite soit égale à OA_1, nous formerons l'angle SOX égal à HOA_1. Il y a deux solutions maxima, répondant aux deux positions OS et OS_1 que peut prendre OS.

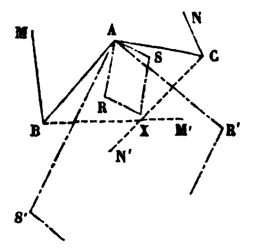
84. Problème. — *On donne trois points* A, B, C: *trouver la base commune des trois triangles* AXY, BXY, CXY, *connaissant les différences de leurs angles au sommet* A, B, C, *ainsi que les rapports entre les rapports de leurs côtés* AX:AY, BX:BY, CX:CY.

Ce problème s'est présenté à Lagrange dans quelques-unes de ses considérations sur les cartes géographiques.

Par les équipollences, la solution en est tout à fait directe et facile (*).

Les conditions du problème (*fig.* 23) sont exprimées

Fig. 23.



par les deux équipollences

$$AX.BY:AY.BX \bumpeq CN:CA,$$
$$AX.CY:AY.CX \bumpeq BM:BA,$$

pourvu que CN ait une inclinaison et une grandeur telles que

$$\text{angle}\,ACN = \text{angle}\,YAX - \text{angle}\,YBX,$$

et que le rapport CN : CA soit égal au quotient donné de AX : AY divisé par BX : BY. On en peut dire autant pour BM. Par la règle I, toutes les droites inconnues se réduisent aux deux AX, AY; il est ensuite facile d'éli-

(*) Voici comment s'exprime Lagrange au sujet de ce problème :

« Or ce problème me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie; et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée, soit pour ne pas trop m'écarter de mon sujet, soit aussi parce qu'il me semble qu'elle ne serait d'aucun usage, à moins qu'on ne pût la ramener ensuite à une construction aisée.

» Par le moyen de ce problème, on pourra donc construire une carte géographique dans laquelle trois lieux quelconques seront placés à volonté; ce qui peut être utile dans quelques occasions. »

(Lagrange, *Mém. de l'Académie de Berlin pour* 1779, p. 201, § 34.)

miner cette dernière, et d'obtenir la formule de solution

$$AX \triangleq (AC.MB + AB.CN) : MN \triangleq AR + AS,$$

si l'on a

$$AR \triangleq AC.MB : MN,$$
$$AS \triangleq AB.NC : NM,$$

c'est-à-dire que, si l'on construit les triangles ACR, ABS, qui, respectivement, soient directement semblables à MNB, NMC, on aura

$$SX \triangleq AR.$$

On pourra pareillement déterminer Y; dans l'expression fournissant ce point, il conviendra de substituer aux rapports CN : CA, BM : BA leurs équipollents CA : CN', BA : BM', afin qu'on puisse éliminer X avec la même facilité qu'on a précédemment éliminé Y. On trouvera ainsi

$$AY \triangleq AR' + AS',$$

AR' et AS' étant respectivement

$$AR' \triangleq AC.M'B : M'N',$$
$$AS' \triangleq AB.N'C : N'M',$$

ce qui donne

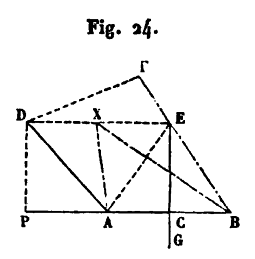
$$AR.AR' \triangleq AS.AS'.$$

85. Problème. — *Construire un triangle, connaissant la base, le produit ou le rapport des deux autres côtés, et la somme ou la différence des deux angles à la base.*

Désignant par X le sommet inconnu du triangle ABX, et se rappelant que cj.AX a une grandeur égale à celle de AX, et une inclinaison égale, mais de signe contraire (45), on verra que les deux conditions, dans chacun des cas du problème, sont comprises dans une seule équipol-

lence, dont le membre inconnu est dans les quatre cas AX cj.BX, AX.BX, AX : BX, AX : cj.BX. Les deux derniers cas ont déjà été résolus aux nos 40 et 47. Le second cas ne présente aucune difficulté, puisque l'équipollence se résout de la même manière qu'une équation du second

Fig. 24.



degré; nous aurons occasion d'effectuer cette résolution au n° 125.

Le premier cas va nous fournir l'occasion de faire une observation fort importante. En posant (*fig.* 24)

$$\mathrm{AX\,cj.BX} \bumpeq \mathrm{AD\,cj.BA},$$

AD.AB sera le produit donné des deux côtés, et

$$\mathrm{angle\,XAD} = \mathrm{angle\,XBA},$$

c'est-à-dire que BAD est la somme des deux angles à la base. L'équipollence qui exprime les conditions du problème contient AX, et

$$\mathrm{cj.BX} \bumpeq \mathrm{cj.AX} - \mathrm{cj.AB}.$$

Il faudra, par suite, la combiner avec sa conjuguée

$$\mathrm{cj.AX(AX - AB) + AB\,cj.AD} \bumpeq 0.$$

Prenant AB pour origine des inclinaisons, la première équipollence devient

$$\mathrm{AX(cj.AX - AB) + AB.AD} \bumpeq 0.$$

Les retranchant l'une de l'autre, on a

$$AX - cj.AX \triangleq AD - cj.AD,$$

ou (10)

$$DX \triangleq cj.DX.$$

Par suite DX est parallèle à AB, ce que l'on pouvait facilement déduire de considérations géométriques.

Éliminant cj.AX, on obtient

$$(AX)^2 - (AB + AD - cj.AD)\,AX + AB.AD \triangleq 0,$$

formule de résolution qui se simplifiera en posant

$$AB \triangleq 2AC, \quad AD - cj.AD \triangleq 2CE,$$

c'est-à-dire (56) en menant CE perpendiculaire sur le milieu de AB, et DE parallèle à AB; et enfin en construisant

$$AF \triangleq AB.AD : AE,$$

c'est-à-dire le triangle ADF directement semblable au triangle isoscèle AEB.

D'après cela, par un calcul facile (10, 18), on trouvera

$$EX \triangleq \sqrt{EA.EF},$$

ce qui nous montre que la droite EX doit être moyenne proportionnelle entre AE, EF, et également inclinée sur ces deux droites.

86. On obtient une solution encore plus simple par la transformation très-facile qui suit, dans laquelle P est le pied de la perpendiculaire abaissée du point D sur la droite AB d'inclinaison nulle, en sorte que

$$CE \triangleq PD, \quad 2PD \triangleq AD - cj.AD \ (56).$$

L'équipollence du second degré en AX donne

$$\begin{aligned}(\mathrm{EX})^2 &\bumpeq (\mathrm{AC}+\mathrm{PD})^2-\mathrm{AB}\,(\mathrm{AP}+\mathrm{PD})\\ &\bumpeq (\mathrm{AC}-\mathrm{AP})^2-(\mathrm{AP})^2+(\mathrm{PD})^2\\ &\bumpeq (\mathrm{CP})^2-(\mathrm{AP}+\mathrm{PD})\,(\mathrm{AP}-\mathrm{PD})\\ &\bumpeq (\mathrm{CP})^2-\mathrm{AD}\,\mathrm{cj.AD}.\end{aligned}$$

Observant que les deux derniers termes ont une inclinaison nulle, nous verrons que cette équipollence est identique à l'équation

$$\mathrm{gr}^2\mathrm{EX}=\mathrm{gr}^2\mathrm{CP}-\mathrm{gr}^2\mathrm{AD}.$$

Par suite, d'après le théorème de Pythagore, sur EC nous prendrons EG = AD, puis nous couperons ED en X par un arc de centre G et d'un rayon égal à CP.

87. Lorsque le problème est impossible, la construction précédente met en évidence cette impossibilité; il n'en est pas ainsi pour celle du n° 85, puisque, si F tombe entre E et B, le point X sera réel et se trouvera sur EC.

Dans le calcul des équipollences, il peut donc arriver (ce qui se présente fort souvent aussi en Algèbre) qu'en combinant une équipollence avec sa conjuguée on obtienne une solution qui ne satisfasse pas à la première. Ceci est rendu évident pour le cas dont nous nous occupons, par ce fait que la condition $\mathrm{DX}\bumpeq\mathrm{cj.DX}$ n'est plus satisfaite.

88. Problème. — *On donne trois circonférences ayant un point commun* I (*fig.* 25). *Mener par ce point la droite* IXZY, *telle que les segments* XZ, XY *de cette droite, compris entre les circonférences, aient entre eux le rapport donné m.*

Désignant par ε^u l'inclinaison de la droite cherchée, la

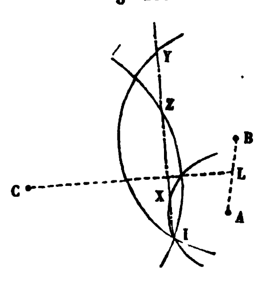
corde $IZ \bumpeq z\varepsilon^u$ du cercle C sera donnée par

$$z\varepsilon^u - IC \bumpeq ZC \bumpeq \varepsilon^t IC,$$

en posant

$$t = \text{inc.}CZ - \text{inc.}IT.$$

Fig. 25.



Multipliant la précédente équipollence par sa conjuguée

$$z\varepsilon^{-u} - \text{cj.}IC \bumpeq \varepsilon^{-t}\,\text{cj.}IC,$$

on obtient

$$z\varepsilon^u \bumpeq \varepsilon^{2u}\,\text{cj.}IC + IC.$$

Cette expression de IZ, et les deux analogues de IX, IY, substituées dans l'équipollence

$$XZ - mXY \bumpeq 0,$$

donnent

$$\varepsilon^{2u}(\text{cj.}AC - m\,\text{cj.}AB) + AC - mAB \bumpeq 0.$$

Construisant

$$AL \bumpeq mAB, \quad AC - mAB \bumpeq LC,$$

on a

$$\varepsilon^{2u}\,\text{cj.}LC \bumpeq -LC,$$

équipollence qui donne

$$2u - \text{inc.}LC = \text{inc.}LC - 180^\circ,$$

ou

$$u = \text{inc.LC} - 90^\circ.$$

Donc la droite cherchée est perpendiculaire à la droite I.C, déterminée plus haut.

89. Une solution aussi rapide étant trouvée, il est facile ensuite de la démontrer au moyen de considérations géométriques, et même de l'étendre au problème analogue relatif à quatre sphères ayant un point commun I.

Le problème concernant les trois circonférences a été résolu beaucoup plus péniblement par Fergola (*Acad. de Naples*, 1788, p. 136); il en déduit la solution de cet autre problème, proposé par Newton (*Princ. math.*, lemme 27) : « Inscrire entre quatre droites données un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné. » J'ai résolu ce dernier au n° 48 de mon Mémoire de 1843. Le premier problème fut proposé ensuite par Steiner et résolu par Clausen (*Journal de Crelle*, t. II, 1827, p. 96; et t. VI, 1830, p. 404).

ADDITIONS DU TRADUCTEUR AU N° 89.

I. *Solution géométrique du problème précédent.* — Soit IXYZ la droite cherchée, A, B, C les trois centres, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ trois perpendiculaires sur IXYZ. On aura

$$IX = 2I\alpha,\quad IY = 2I\beta,\quad IZ = 2I\gamma,$$

et, par suite,

$$XY = 2\alpha\beta,\quad XZ = 2\alpha\gamma;$$

mais, en appelant L la rencontre de AB et de $C\gamma$, on a

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{AB}{AL} \quad \text{ou} \quad \frac{XY}{XZ} = \frac{AB}{AL}.$$

On voit donc qu'il suffit de diviser AB en L comme XY doit être divisé en Z pour obtenir une droite CL perpendiculaire à la droite cherchée.

Le problème peut présenter des cas particuliers sur lesquels nous n'insistons pas, et qu'il est facile de discuter.

Extension du même problème à quatre sphères ayant un point commun I. — Soient IXYZV la droite cherchée, A, B, C, D les quatre centres, $A\alpha$

$B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ des perpendiculaires sur IXYZV. On aura, comme plus haut,

$$XY = 2\alpha\beta, \quad XZ = 2\alpha\gamma, \quad XV = 2\alpha\delta.$$

Appelons C′ et D′ les rencontres de AB avec deux plans perpendiculaires à IXYZV menés respectivement par C et D. Nous aurons

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\alpha\gamma}{AC'} = \frac{\alpha\delta}{AD'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{XY}{AB} = \frac{XZ}{AC'} = \frac{XV}{AD'}.$$

Donc, en divisant AB en C′ et D′, comme XY doit être divisé en Z et V, nous obtiendrons les droites CC′ et DD′, à chacune desquelles la droite cherchée doit être perpendiculaire. On n'aura donc qu'à mener par le point I une parallèle à la plus courte distance de CC′ et DD′.

Nous laissons encore ici au lecteur le soin d'examiner les cas particuliers.

On peut remarquer combien ces solutions sont simples et faciles, au moins en apparence. Mais il ne faudrait pas croire qu'il fût aisé de les découvrir *a priori*, par les seules considérations géométriques ordinaires. La méthode des équipollences nous conduit au contraire à ces résultats d'une façon tout à fait naturelle. Il est intéressant de voir combien cette Géométrie analytique nouvelle apporte un puissant concours à la Géométrie synthétique elle-même, en lui fournissant des solutions simples, auxquelles l'analogie permet de donner souvent une plus grande extension. C'est ce qui se présente ici pour le problème des trois cercles et celui des quatre sphères; et c'est pourquoi nous avons tenu à en indiquer les solutions géométriques, qui montrent bien tout ce qu'on peut demander à la méthode si féconde des équipollences.

II. Problème. — *Inscrire entre quatre droites données un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné.*

Soient AB, BC, CD, DA (*fig.* 25 *bis*) les quatre droites données, et LMNP le quadrilatère donné; le sommet homologue de L devant se trouver sur AB, l'homologue de M sur BC, et ainsi de suite.

Appelons XYZV le quadrilatère cherché. On exprimera qu'il est semblable (directement) à LMNP, au moyen de la double équipollence

$$\frac{XY}{LM} \triangleq \frac{YZ}{MN} \triangleq \frac{ZV}{NP}.$$

De plus, X étant situé sur AB, on aura

$$AX \triangleq x\,AB,$$

et de même

$$BY \triangleq y\,BC,$$
$$CZ \triangleq z\,CD,$$
$$DV \triangleq v\,DA.$$

Or

$$XY \bumpeq BY - AX + AB \bumpeq y BC - x AB + AB,$$
$$YZ \bumpeq CZ - BY + BC \bumpeq z CD - y BC + BC,$$
$$ZV \bumpeq DV - CZ + CD \bumpeq v DA - z CD + CD.$$

Les équipollences exprimant la similitude deviendront donc

$$\frac{y BC - x AB + AB}{LM} \bumpeq \frac{z CD - y BC + BC}{MN} \bumpeq \frac{v DA - z CD + CD}{NP},$$

ou, en les décomposant en deux et chassant les dénominateurs LM, NP,

$$- x AB + y BC\left(1 + \frac{LM}{MN}\right) - z CD \frac{LM}{MN} \bumpeq BC \frac{LM}{MN} - AB,$$
$$- y BC \frac{NP}{MN} + z CD\left(\frac{NP}{MN} + 1\right) + v AD \bumpeq CD - BC \frac{NP}{MN}.$$

Mais, si nous construisons sur BC, pris pour homologue de MN, le quadrilatère EBCF directement semblable à LMNP, puis si nous faisons

Fig. 25 *bis*.

de même sur le côté CD, pris pour homologue de MN, le quadrilatère GCDH directement semblable à LMNP, nous aurons

$$BC \frac{LM}{MN} \bumpeq EB, \quad CD \frac{LM}{MN} \bumpeq GC,$$
$$BC \frac{NP}{MN} \bumpeq CF, \quad CD \frac{NP}{MN} \bumpeq DH.$$

Nos équipollences deviendront, par suite,

(1) $$-x\,AB + y\,EC - z\,GC \triangleq EA,$$

(2) $$-y\,CF + z\,CH + v\,AD \triangleq FD.$$

Pour les faire servir à la détermination des coefficients inconnus, nous les combinerons avec leurs conjuguées

(3) $$-x\,\text{cj}.AB + y\,\text{cj}.EC - z\,\text{cj}.GC \triangleq \text{cj}.EA,$$

(4) $$-y\,\text{cj}.CF + z\,\text{cj}.CH + v\,\text{cj}.AD \triangleq \text{cj}.FD.$$

L'élimination de x entre (1) et (3), d'une part, et celle de v entre (2) et (4), de l'autre, donne lieu aux équipollences

$$EA + y\,CE + z\,GC \triangleq \text{cj}.EA\frac{AB}{\text{cj}.AB} + y\,\text{cj}.CE\frac{AB}{\text{cj}.AB} + z\,\text{cj}.GC\frac{AB}{\text{cj}.AB},$$

$$FD + y\,CF + z\,HC \triangleq \text{cj}.FD\frac{AD}{\text{cj}.AD} + y\,\text{cj}.CF\frac{AD}{\text{cj}.AD} + z\,\text{cj}.HC\frac{AD}{\text{cj}.AD}.$$

Si nous construisons les points C′, E′, G′, symétriques de C, E, G par rapport à AB, et C″, F″, H″, symétriques de C, F, H par rapport à AD, les deux équipollences deviendront

$$EA + y\,CE + z\,GC \triangleq E'A + y\,C'E' + z\,G'C',$$
$$FD + y\,CF + z\,HC \triangleq F''D + y\,C''F'' + z\,H''C''.$$

En les retranchant l'une de l'autre, on obtient

$$y(FE + E'C' + C''F'') + z(GH + C'G' + H''C'') \triangleq E'E + FF''.$$

Construisons successivement

$$EI \triangleq E'C', \quad IK \triangleq C''F'',$$
$$HQ \triangleq C'G', \quad QR \triangleq H''C'',$$
$$ES \triangleq FF'',$$

et il viendra

$$y\,FK + z\,GR \triangleq E'S.$$

En menant E′T parallèle à FK, ST parallèle à RG, on aura le triangle E′TS, qui nous donnera

$$E'T + TS \triangleq E'S,$$

et par comparaison

$$E'T \triangleq y\,FK, \quad TS \triangleq z\,GR,$$

d'où

$$y \triangleq \frac{E'T}{FK}, \quad z \triangleq \frac{TS}{GR},$$

c'est-à-dire

$$\frac{BY}{BC} \triangleq \frac{E'T}{FK}, \quad \frac{CZ}{CD} \triangleq \frac{TS}{GR}.$$

Les points Y et Z se détermineront donc aisément par le partage de chacun des côtés BC, CD dans un rapport donné (en prenant soin de remarquer les signes). Il n'y aura plus ensuite qu'à construire sur ce côté YZ un quadrilatère semblable à LMNP, YZ étant homologue de MN, et les deux autres sommets X, V tomberont forcément sur les droites données.

Si l'on voulait construire un quadrilatère *symétriquement semblable* à LMNP et satisfaisant aux conditions demandées, on commencerait par tracer L'M'N'P' symétrique de LMNP, et l'on opérerait sur L'M'N'P, comme on l'a fait sur LMNP.

La construction ci-dessus fera ressortir les circonstances particulières qui peuvent se présenter parfois. C'est ainsi qu'on verra que ce problème : *Inscrire un carré dans un carré*, est indéterminé, et conduit seulement à la relation $y = z$.

(*A suivre.*)

PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA DROITE RECTIFIANTE;

PAR M. CH. RUCHONNET.

Le plan mené par la tangente en un point d'une courbe non plane perpendiculairement au plan osculateur a été appelé *plan rectifiant* (*), parce que, si l'on considère ce plan en tous les points de la courbe, son enveloppe est une surface qui, par son développement, la transforme en une ligne droite. La génératrice de cette surface, qui est l'intersection limite des plans rectifiants en deux points de la courbe infiniment voisins, s'appelle la *droite rectifiante*. Cette droite jouit d'une propriété caractéristique dont voici l'énoncé :

De toutes les droites qu'on peut conduire par un point M *d'une courbe, la rectifiante est la plus également inclinée sur les tangentes en deux points* M *et* M' *infiniment voisins; en d'autres termes, la différence des angles que cette droite fait avec les deux tangentes est*

(*) Par Lancret, au commencement de ce siècle.

infiniment petite par rapport à la même différence relative à toute autre droite menée par M.

Soient MT la tangente en M, MT' la parallèle menée par M à la tangente en M', et MS une droite dirigée à volonté. Posons

$$\text{angle TMS} = a, \quad \text{angle T'MS} = a + \omega;$$

il s'agit de montrer que la valeur que reçoit ω quand MS coïncide avec la droite rectifiante est infiniment petite par rapport à la valeur qu'il prend dans tout autre cas.

Dans tout ce qui va suivre, l'angle des tangentes en M, M' sera représenté par ε, et celui des plans osculateurs en ces mêmes points par η.

J'aurai à faire usage des deux théorèmes suivants, dont le premier est bien connu :

I. *La droite rectifiante fait avec la tangente un angle* α *qui est donné par la relation* $\tang\alpha = \lim \frac{\varepsilon}{\eta}$. *Le plan osculateur et le plan normal au point* M *forment par leur intersection quatre dièdres droits. La droite rectifiante passe dans celui de ces dièdres où se trouve le point* M'.

II. *Le plan* TMT' *fait avec le plan osculateur un angle égal à* $\frac{1}{2}\eta$, *à une quantité près d'ordre supérieur à celui de* η.

Pour le faire voir, par un point quelconque O conduisons des parallèles à toutes les tangentes de la courbe : ces parallèles forment par leur ensemble un cône dont les plans tangents sont parallèles aux plans osculateurs de la courbe. Soit m un point quelconque pris sur la génératrice parallèle à la tangente MT : le plan mené par m perpendiculairement à Om coupe le cône suivant une courbe C qui rencontre en un point m' la génératrice

parallèle à la tangente en M′ à la courbe donnée. Soit t le point de rencontre des tangentes en m et en m' à la courbe C : l'angle de ces tangentes est, en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur au sien, égal à l'angle des plans tangents au cône suivant Om et Om', lequel est précisément égal à η. Les angles tmm', $tm'm$ formés par les tangentes en m, m' avec la corde mm' sont dès lors égaux à $\frac{1}{2}\eta$; mais le premier de ces deux angles est égal à celui des plans Omt, mOm', c'est-à-dire à l'angle que le plan osculateur en M fait avec le plan TMT′. Ce dernier est donc égal à $\frac{1}{2}\eta$, et c'est là ce qu'il s'agissait de prouver.

Retournons maintenant à notre objet. Les trois droites MT, MT′, MS peuvent être envisagées, à partir de M, dans deux directions différentes, et il sera bon de préciser pour chacune celle que nous choisirons. Nous appellerons MT celle des deux directions de la tangente en M qui fait un angle aigu avec la corde MM′ considérée comme tirée de M vers M′, et nous appellerons MT′, MS celles des directions des deux autres droites qui sont situées par rapport au plan osculateur en M du même côté que le point M′. Alors l'angle TMT′ est égal à l'angle infiniment petit ε.

Désignons par A l'angle dièdre dont l'arête est MT et qui est formé par les deux plans TMS, TMT′ : la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique donne

$$\cos(a+\omega) = \cos a \cos\varepsilon + \sin a \sin\varepsilon \cos A,$$

d'où, en se rappelant que $\cos\varepsilon = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon$,

$$(1)\qquad \cos a - \cos(a+\omega) = 2\cos a \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon - \sin a \sin\varepsilon \cos A.$$

Or une autre formule bien connue donne

$$(2)\qquad \cos a - \cos(a+\omega) = 2\sin\left(a+\frac{\omega}{2}\right)\sin\frac{\omega}{2}.$$

Substituons au premier membre de (1) sa valeur fournie par la relation (2). Dans l'égalité ainsi obtenue, on n'altèrera le premier membre que d'une quantité d'ordre supérieur au sien, si l'on y remplace $\sin\left(a+\frac{\omega}{2}\right)$ par $\sin a$, et $\sin\frac{\omega}{2}$ par $\frac{\omega}{2}$. Divisant en outre par $\sin a$, il vient

$$(3) \qquad \omega = 2\cot a \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon - \sin\varepsilon\cos A,$$

et il s'agit de déterminer l'ordre infinitésimal du second membre de cette équation. Nous considérons l'arc MM', et par suite aussi les angles ε et η, comme étant du premier ordre.

A cet effet, supposons d'abord que MS ne soit pas situé dans le plan rectifiant. Alors, comme le plan TMT' se confond à la limite avec le plan osculateur, l'angle A est différent d'un angle droit, son cosinus ne tend pas vers zéro, et par conséquent $\sin\varepsilon\cos A$ est du premier ordre; mais l'autre terme du second membre de l'équation (3) est du second ordre : donc ω est du premier ordre. Ainsi ω est du premier ordre toutes les fois que la droite MS n'est pas contenue dans le plan rectifiant.

Supposons maintenant que la droite MS soit contenue dans ce plan. Le plan TMT' fait avec le plan osculateur un angle égal à $\frac{1}{2}\eta$ (II), et, comme ce dernier plan passe par MT, l'angle A, dans le cas qui nous occupe, est égal à $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\eta$; alors on a

$$\cos A = \sin\tfrac{1}{2}\eta, \quad \text{ou} \quad \cos A = \tfrac{1}{2}\eta.$$

Remplaçant en outre $2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon$ par $\frac{1}{2}\varepsilon^2$, l'équation (3) devient

$$\omega = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cot a - \tfrac{1}{2}\varepsilon\eta,$$

et chacun des deux termes n'est fautif que d'une quantité d'ordre supérieur au second. Cette valeur de ω est du

second ordre, si les deux termes ne sont pas des infiniment petits égaux, par conséquent toutes les fois que l'on n'a pas $\tan g a = \lim \frac{\varepsilon}{\eta}$. Or $\tan g a = \lim \frac{\varepsilon}{\eta}$ est la valeur de $\tan g a$ relative à la droite rectifiante (I) ; donc, si MS est situé dans le plan rectifiant sans être la droite rectifiante, ω est du second ordre.

Mais si MS se confond avec cette droite, les deux termes du second membre de la dernière équation étant des infiniment petits égaux, ω est d'un ordre supérieur au second, ce qui achève de démontrer la proposition énoncée.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Genty, à Oran. — On peut donner une démonstration géométrique très-simple des théorèmes énoncés par M. Painvin, t. X, 2e série, p. 481, dont le premier a été rectifié dans la livraison de juillet des *Annales*.

Je donnerai les démonstrations relatives aux courbes ; le lecteur trouvera facilement lui-même les démonstrations des théorèmes relatifs aux surfaces.

Théorème I. — Soient donnés deux points fixes A et B, et une courbe fixe Σ d'ordre m ; on imagine un point M se déplaçant sur la courbe Σ, puis, avec deux autres points fixes A' et B', on construit dans le plan un triangle A'B'S, tel qu'on ait toujours, quelle que soit la position du point M sur la courbe Σ,

$$SA' = MA, \quad SB' = MB :$$

le point S décrira une courbe (S) d'ordre $2m$ en général.

Les points M et S seront dits *correspondants*. A un

point M de Σ correspondent deux points S et S′ du lieu (S) ; ce sont les points d'intersection de deux cercles ayant les points A′ et B′ pour centres, et pour rayons les longueurs MA et MB respectivement. Donc la droite A′B′ est un axe de la courbe (S).

Remarquons maintenant qu'à un cercle Γ ayant son centre au point A correspond un cercle (C) ayant son centre au point A′. Or le cercle Γ rencontre Σ en $2m$ points; à chacun de ces points en correspondent deux autres, qui sont des points d'intersection du cercle (C) avec la courbe (S) ; il y a en tout $4m$ points semblables : donc la courbe (S) est en général d'ordre $2m$.

On aurait pu aussi démontrer le théorème, en remarquant que les points d'intersection de la droite A′B′ avec le lieu (S) correspondent aux points d'intersection de Σ avec une conique ayant pour foyers les points A et B, et dont le grand axe est égal à A′B′.

La seconde partie du théorème résulte immédiatement du théorème suivant, qui est très-connu, puisque c'est celui qu'on applique pour démontrer géométriquement les propriétés principales des tangentes aux coniques.

Théorème II. — Soient A et B deux points fixes dans le plan d'une courbe, M et M′ deux points infiniment voisins de cette courbe. Si l'on prend sur MA et sur MB des longueurs Ma et Mb respectivement proportionnelles aux différences AM — AM′, et BM — BM′, la résultante des droites Ma et Mb est la normale à la courbe au point M.

Extrait d'une Lettre de M. H. Laurent. — M. Bienaymé, qui a bien voulu jeter un coup d'œil sur la Note que j'ai insérée dans ce Journal au sujet du principe de la probabilité composée, m'a fait observer que

la solution que j'avais donnée était inexacte, et que la véritable solution était précisément celle dont je critiquais l'exactitude.

Quoi qu'il en soit, l'objection que l'on peut faire à la démonstration de Laplace subsiste tout entière; la voici :

« ... Nommons p le nombre des cas possibles relatifs au premier événement et p' celui des cas qui lui sont favorables; nommons ensuite q le nombre des cas possibles relatifs au second événement, qui correspondent à chacun des cas p, et q' le nombre des cas qui lui sont favorables.

» Le nombre des cas possibles relatifs à l'événement composé sera évidemment pq, et le nombre des cas favorables à cet événement sera $p'q'$; sa possibilité sera donc $\frac{p'q'}{pq}$ » $\left(\text{ou } \frac{p'}{p}\,\frac{p'q'}{p'q}\right)$. « Or $\frac{p'}{p}$ est la probabilité du premier événement, et $\frac{p'q'}{p'q}$ est la probabilité que, le premier événement étant arrivé, le second aura lieu.... »

Il m'a semblé que, si la manière dont le premier événement se présente peut influer sur le nombre des cas possibles relatifs au second, la démonstration précédente tombe en défaut; parce que, q n'étant plus constant, il est dépourvu de sens de dire que le nombre total des cas possibles est pq.

Laplace, dans une nouvelle édition de son Ouvrage, donne une démonstration plus rigoureuse :

Si l'on considère l'ensemble des P cas possibles qui peuvent se présenter quand on attend l'événement composé, f de ces cas seront favorables au premier événement et f' cas parmi ceux-ci seront favorables au second quand le premier aura eu lieu, en sorte que

$$\frac{f'}{P} = \frac{f'}{f}\,\frac{f}{P}$$

sera la probabilité cherchée. Or $\frac{f}{p}$ est la probabilité du premier événement, $\frac{f'}{f}$ celle du second quand le premier a eu lieu. Donc, etc.

Dans l'exemple que j'avais choisi, j'avais admis, sans le démontrer, que les cas que j'avais considérés étaient également possibles; ils l'eussent été, si l'on avait voulu en faire la convention à l'avance; mais alors il n'aurait plus fallu admettre que les billes tombaient avec la même facilité dans les deux compartiments de la boîte considérée; alors le principe de la probabilité composée n'eût plus été applicable, mais seulement parce qu'il eût été difficile d'apprécier la probabilité du premier événement composant.

Extrait d'une Lettre de M. Moreau, à Constantine. — Je n'ai pas lu sans étonnement la Note, sur un passage de la théorie analytique des probabilités, insérée dans le numéro d'avril dernier, p. 176.

Personne, jusqu'à présent, n'avait songé à contester l'exactitude de l'énoncé, que donne Laplace, du théorème sur la probabilité des événements composés. Quant à moi, je pense qu'il est impossible de rien ajouter à cet énoncé sans tomber dans la diffusion et sans courir le risque beaucoup plus grave d'en faire des applications erronées.

Dans le problème traité comme exemple par l'auteur de la Note en question, le nombre des cas favorables est bien $C_n^a \times C_a^b$; le nombre des cas possibles est bien aussi 3^n; mais comme tous ces cas ne sont pas également possibles, il n'est pas permis de prendre le rapport de ces deux nombres pour obtenir la probabilité cherchée.

Il est facile de voir qu'en ramenant tous les cas à une égale possibilité les nombres des cas favorables et

des cas possibles deviennent respectivement

$$C_n^a \times C_a^b 2^{n-a}, \quad \text{et} \quad 2^n \times 2^n = 2^{2n}.$$

On peut alors prendre avec raison le rapport de ces deux nombres, et l'on a

$$P = \frac{C_n^a C_a^b 2^{n-a}}{2^{2n}} = \frac{C_n^a C_a^b}{2^{n+a}} = \frac{C_n^a}{2^n} \times \frac{C_a^b}{2^a},$$

ce qui est précisément la traduction de l'énoncé de Laplace.

Au reste, l'inexactitude de la formule $\frac{C_n^a C_a^b}{3^n}$ saute immédiatement aux yeux; prenons, en effet, les deux cas suivants :

$$a = b = 1, \quad \text{et} \quad a = b = n - 1.$$

D'après la formule précédente, ces deux cas auraient la même probabilité; or cela reviendrait à dire qu'il y aurait la même chance à tirer une boule désignée à l'avance d'une urne qui n'en contiendrait que 2, ou d'une urne qui en contiendrait 2^{n-1}, ce qui ne saurait être admis par personne.

Permettez-moi maintenant, Monsieur, de vous parler d'un autre sujet.

A la page 46 du *Bulletin bibliographique* pour l'année 1857, se trouve l'énoncé d'un théorème de Legendre, proposé pour prix en 1858 par l'Académie des Sciences.

Si je l'ai bien compris, cet énoncé est le suivant, mais il ne m'a pas paru très-clair.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ les nombres premiers impairs successifs

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19, \ldots, \ldots\ldots$$
$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6,\ P_7,\ P_8, \ldots, P_n, \ldots;$$

soit aussi une progression arithmétique

$$A - C, \quad 2A - C, \quad 3A - C, \quad \ldots,$$

dans laquelle A et C sont premiers entre eux : démontrer que, si dans cette progression, à partir d'un rang quelconque, on prend P_n termes consécutifs

$$KA - C, \quad (K+1)A - C, \quad \ldots, \quad (K + P_n - 1)A - C,$$

il y aura toujours au moins un de ces P_n termes qui ne sera divisible par aucun de n nombres premiers pris au hasard dans la première suite.

Ce théorème m'intéressait particulièrement, parce qu'en le supposant exact j'en avais déduit très-simplement le *postulatum* de M. Bertrand, mais, après en avoir cherché pendant longtemps la démonstration, j'en ai reconnu l'inexactitude.

Prenons, en effet,

$$\left.\begin{aligned} A &= 49493 = 43 \times 1151 \\ C &= 1072 = 16 \times 67 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{nombres}\\ \text{premiers entre eux}\end{array}$$
$$K = 197,$$
$$n = 8, \quad \text{et par suite} \quad P_n = 19;$$

on peut s'assurer facilement que chacun des 19 termes de la progression arithmétique

$$197.49493 - 1072, \quad 198.49493 - 1072, \quad \ldots,$$
$$\ldots, \quad 215.49493 - 1072$$

est divisible au moins par l'un des 8 nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, résultat qui infirme le théorème en question.

Conformément au désir exprimé par M. Nievenglowski (même tome, p. 235 et 236), je m'empresse de faire savoir aux lecteurs des *Nouvelles Annales* que M. Nievenglowski, professeur au lycée de Clermont-Ferrand, a, effectivement, découvert une *faute à corriger* dans un Traité de Trigonométrie, à la rédaction duquel j'ai participé :

Page 106 de ce Traité, ligne 10 en remontant, au lieu de *aucune*, lisez *une*. G.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Composition de Mathématiques.

Étant donnés une ellipse A et un point P dans son plan, de ce point P on mène des normales à l'ellipse A et l'on considère la conique B qui passe par le point P et les pieds des quatre normales :

1° Trouver les coordonnées du centre de cette conique B et celles de ses foyers.

2° Trouver le lieu C du centre et le lieu D des foyers de la conique B, lorsque l'ellipse A varie de manière que ses foyers restent fixes.

3° Trouver le lieu des points d'intersection du lieu D et de la droite OP, lorsque le point P décrit un cercle de rayon donné et ayant pour centre le centre O de l'ellipse A.

Composition de Physique.

I. Théorie de l'électrophore et des machines qui en dérivent.

II. Deux barreaux aimantés font le même nombre d'oscillations dans le même temps, quand on les suspend horizontalement à un fil vertical sans torsion; mais, quand on charge chacun d'eux, en son milieu, d'un même barreau de cuivre, la durée des oscillations de l'un des aimants est doublée et celle de l'autre est triplée.

Cela posé, si l'on croise les deux barreaux aimantés par leur milieu et qu'on les suspende encore horizontalement à un fil vertical sans torsion, on demande quelle sera la condition d'équilibre.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE (ANNÉE 1873).

Composition française........	$2^h 30^m$.
Histoire....................	$2^h 30^m$.
Géographie..................	2 heures.
Allemand (thème)...........	2 »
Dessin d'imitation...........	3 »
Version latine...............	2 »

Épure ($2^h 30^m$).

Deux cônes circulaires droits et égaux ont même sommet S et se touchent extérieurement suivant la génératrice SA, de manière à adhérer l'un à l'autre. Le rayon de base vaut 38 millimètres, et la génératrice est double du rayon. La base de l'un des cônes est appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal, sa circonférence touchant la ligne de terre et la génératrice SA étant parallèle au plan vertical de projection. Cela posé, on demande :

1° De construire les projections du solide formé par l'ensemble des deux cônes ;

2° De construire la partie invisible du plan vertical de projection, supposé relevé, l'œil étant placé sur la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point A, et à une distance en avant de cette ligne de terre égale à deux fois le diamètre de base de l'un des cônes.

Ombrer la partie invisible demandée, en n'y comprenant pas la projection verticale des cônes.

Lavis (3 heures).

Projection horizontale d'une pyramide régulière. — Construire un décagone régulier à deux côtés verticaux,

inscriptible dans un cercle de centre A et de 8 centimètres de rayon. Le point A, placé au milieu de la feuille, est aussi le centre d'un carré de 18 centimètres de côté. Numéroter les sommets du décagone, le point 1 en haut, le point 2 à droite de 1, et ainsi de suite, et les joindre au point A.

Poser une teinte plate, assez forte, dans le triangle 4A5.

Poser une teinte plate, moins forte, dans le pentagone A3456A.

Poser une teinte plate, assez faible, dans le polygone A234567A.

Poser une teinte plate, plus faible, dans le polygone A12345678A.

Poser une teinte plate, très-faible, dans le polygone A10, 123456789A.

Le triangle 10A9 reste blanc. La partie du carré qui entoure la projection de la pyramide reçoit une teinte plate de moyenne intensité.

Composition de mathématiques ($2^h 30^m$).

1° Calculer à 1 millimètre près, sans employer les logarithmes, le côté du carré équivalent à un cercle de 20 mètres de rayon.

2° Résoudre l'équation $\frac{a}{x} = \frac{x-1}{x-a}$, et déterminer les limites entre lesquelles la quantité a doit être comprise pour que les racines soient réelles.

3° On donne une circonférence et une tangente, et l'on demande de mener une corde DC, parallèle à la tangente, telle que, si l'on abaisse les perpendiculaires DA et CB sur la tangente, le rectangle ABCD ait sa diagonale de longueur donnée. Discussion sommaire.

N.-B. — Mettre tous les calculs sur la copie.

Calcul logarithmique (2 heures).

1° Calculer les angles compris entre zéro et 180 degrés, satisfaisant à l'équation

$$5\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0.$$

2° Calculer la valeur de x donnée par l'équation

$$x^3 = a^3 \sin\varphi + b^3 \cos\varphi,$$

lorsque

$$a = 18928^{m},7, \quad b = 20842^{m},8, \quad \varphi = 115°45'27''.$$

N.-B. — Mettre tous les calculs sur la copie.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1049

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 557)

PAR M. DOUCET.

C'est une propriété des coniques, que les sommets des angles droits circonscrits à ces courbes appartiennent à une circonférence; trouver les courbes qui ont la même propriété. (L. KIEPERS.)

Soient

$$y = px + f(p),$$

$$y = -\frac{1}{p}x + f\left(-\frac{1}{p}\right)$$

les équations, rapportées à deux axes rectangulaires, des côtés d'un angle droit circonscrit à une certaine courbe.

Après avoir écrit les deux équations comme il suit :

$$y - px = f(p),$$
$$py + x = pf\left(-\frac{1}{p}\right),$$

élevons-les au carré et ajoutons-les membre à membre ; il en résulte

$$(x^2 + y^2)(1 + p^2) = \overline{f(p)}^2 + p^2 \overline{f\left(-\frac{1}{p}\right)}^2,$$

et, si le point de concours des tangentes doit décrire la circonférence $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, on a

$$R^2(1 + p^2) = \overline{f(p)}^2 + p^2 \overline{f\left(-\frac{1}{p}\right)}^2,$$

ou

$$\frac{R^2 - \overline{f(p)}^2}{p} = \frac{R^2 - \overline{f\left(-\frac{1}{p}\right)}^2}{-\frac{1}{p}}.$$

Soit donc $\frac{R^2 - \overline{f(p)}^2}{p} = F(p)$; la fonction F conserve la même valeur, quand on y change p en $-\frac{1}{p}$. C'est une fonction entièrement arbitraire de $p - \frac{1}{p}$. Posons donc

$$\frac{R^2 - \overline{f(p)}^2}{p} = F\left(p - \frac{1}{p}\right),$$

d'où

$$f(p) = \sqrt{R^2 - pF\left(p - \frac{1}{p}\right)}.$$

Soit $p = \operatorname{tang}\varphi$; F est une fonction arbitraire de $\operatorname{tang} 2\varphi$.

Les courbes que demande l'énoncé sont les enveloppes des droites

$$y = x \operatorname{tang}\varphi + \sqrt{R^2 + \operatorname{tang}\varphi\, F(\operatorname{tang} 2\varphi)}.$$

Les coniques correspondent au cas particulier où l'on prend, pour la fonction arbitraire F, l'expression

$$M + \frac{N}{\operatorname{tang} 2\varphi},$$

M et N désignant deux constantes. On obtient encore une hyperbole, en supposant constante la fonction F.

Note. — La même question a été résolue par M. E. Pellet.

Question 1035

(voir 2e série, t. XI, p. 48);

PAR M. C. MOREAU, à Constantine.

L'équation indéterminée $t^2 - Du^2 = 4$, dans laquelle D est de la forme $(4n+2)^2 + 1$, n désignant un nombre entier positif quelconque 1, 2, 3,..., n'a aucune solution formée de deux nombres impairs, et la solution constituée par les deux nombres entiers positifs les plus petits est

$$t = 16(2n+1)^2 + 2, \quad u = 8(2n+1).$$

(F. DIDON.)

Soit

$$4n + 2 = k,$$

l'équation proposée devient

$$k^2u^2 + u^2 + 4 = t^2;$$

t est donc plus grand que ku. Posons

$$t = ku + u_1,$$

il vient

$$u^2 + 4 = 2ku_1u + u_1^2,$$

ce qui montre que u_1 est de même parité que u et lui est inférieur, puisque k est au moins égal à 6. De plus, on tire de cette équation

$$u = ku_1 \pm \sqrt{k^2u_1^2 + u_1^2 - 4};$$

donc $k^2u_1^2 + u_1^2 - 4$ doit être un carré parfait. Posons de nouveau

$$(k^2u_1^2 + u_1^2 - 4) = (ku_1 + u_2)^2;$$

on verra, comme précédemment, que u_2 est de même parité que u_1 et lui est inférieur, et que la quantité

$$k^2u_2^2 + u_2^2 + 4$$

doit être un carré parfait.

On voit donc, en continuant le même raisonnement, que si $k^2u^2 + u^2 + 4$ est un carré parfait, il doit en être de même des quantités

$$k^2u_1^2 + u_1^2 - 4, \quad k^2u_2^2 + u_2^2 + 4, \quad k^2u_3^2 + u_3^2 - 4, \ldots,$$

dans lesquelles $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sont de même parité que u et vont en décroissant. Si u pouvait être impair, il en serait de même des nombres $u_1, u_2, u_3, \ldots$, et, comme chacun de ces nombres est plus petit que le précédent et que 4 est plus petit que 3^2, il en résulte que l'un d'eux serait égal à l'unité, et que l'une des deux quantités $k^2 + 1 + 4$, $k^2 + 1 - 4$ devrait être un carré parfait, ce qui est impossible, puisque k est au moins égal à 6.

Si, au contraire, u est supposé pair, sa valeur trouvée précédemment en fonction de u_1 montre que son minimum correspond à $u_1 = 2$, ce qui donne

$$u = 2ku_1 = 4k = 8(2n + 1),$$
$$t = ku + u_1 = 4k^2 + 2 = 16(2n + 1)^2 + 2.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Lucien Bignon, à Lima; Moret-Blanc, au Havre; Brocard, à Constantine.

Question 1083

(voir 2e série, t. XI, p. 288);

PAR M. GENTY, à Oran.

On demande: 1° quel est le lieu du sommet d'un angle droit dont chacun des côtés rencontre deux droites données; 2° quelle est l'enveloppe du plan de cet angle droit. (MANNHEIM.)

1° Soient D, d, D', d' les deux couples de droites que doivent rencontrer respectivement les deux côtés de l'angle droit, je dis qu'elles font partie du lieu cherché.

En effet, soit Δ une droite quelconque, qui rencontre D, d, D' aux points M, m, M', respectivement. Par le point M menons un plan perpendiculaire à la droite Δ, et soit μ le point d'intersection de ce plan avec la droite d'.

Les droites $M\mu$ et Δ forment entre elles un angle droit; donc le point M est un point du lieu. Il en est de même évidemment des points m et M'; donc enfin les quatre droites données font partie du lieu.

Cherchons maintenant les autres points de la surface cherchée, situés sur la droite Δ.

Soit P le point de rencontre de la droite d' avec le plan des droites Δ et D'. Toute droite rencontrant à la fois Δ, D' et d', passera par le point P; il n'y a, par suite, qu'une seule de ces droites qui rencontre Δ sous un angle droit; c'est la perpendiculaire PQ abaissée du point P sur la droite Δ.

Ainsi la droite Δ ne rencontre le lieu qu'en quatre points : donc ce lieu est une surface du quatrième ordre S.

La droite Δ engendre un hyperboloïde H, qui coupe la surface S suivant une courbe du huitième ordre. Or les directrices D, d, D' font partie de l'intersection; donc le lieu du point φ est une courbe gauche du cinquième

ordre. Les génératrices de H ne rencontrent la courbe qu'en un seul point; les directrices la rencontrent en quatre points.

2° Le même raisonnement montre que l'enveloppe du plan de l'angle droit est une surface de la quatrième classe Σ.

Les droites données sont situées sur cette surface. En effet, le plan des droites D' et Δ est un des plans tangents à la surface enveloppe; donc les plans tangents à l'hyperboloïde H tout le long de la droite D' sont aussi tangents à la surface Σ; donc cette droite est située tout entière sur la surface.

Il en est évidemment de même des autres droites données. Il en résulte que la développable circonscrite aux surfaces H et Σ est de la cinquième classe. Par une génératrice quelconque de H, on ne peut mener qu'un plan tangent à cette développable, tandis que par une directrice quelconque on en peut mener quatre.

Question 1093

(voir 2e série, t. XI, p. 479);

PAR M. GAMBEY.

Un tétraèdre abcd étant conjugué à un paraboloïde, si l'on désigne par a', b', c' les points où les arêtes da, db, dc coupent le paraboloïde, on a

$$\left(\frac{da'}{aa'}\right)^2 + \left(\frac{db'}{bb'}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{cc'}\right)^2 = 1.$$

(H. FAURE.)

Prenons pour axes de coordonnées les arêtes *da*, *db*, *dc*, et posons

$$da = a, \quad db = b, \quad dc = c,$$
$$da' = A, \quad db' = B, \quad dc' = C.$$

Il faut démontrer que l'on a

$$\left(\frac{A}{A-a}\right)^2+\left(\frac{B}{B-b}\right)^2+\left(\frac{C}{C-c}\right)^2=1.$$

Les équations des quatre faces du tétraèdre et celle des surfaces du second ordre, conjuguées à ce tétraèdre, sont

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

$$lx^2+my^2+nz^2+p\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)^2=0.$$

Ces surfaces seront des paraboloïdes, si l'on a

$$(1)\qquad \frac{1}{a^2l}+\frac{1}{b^2m}+\frac{1}{c^2n}+\frac{1}{p}=0.$$

On doit avoir de plus

$$lA^2+p\left(\frac{A}{a}-1\right)^2=0,$$

$$mB^2+p\left(\frac{B}{b}-1\right)^2=0,$$

$$nC^2+p\left(\frac{C}{c}-1\right)^2=0,$$

ou, en multipliant respectivement par a^2, b^2, c^2,

$$lA^2a^2+p(A-a)^2=0,$$
$$mB^2b^2+p(B-b)^2=0,$$
$$nC^2c^2+p(C-c)^2=0.$$

Tirant de là les valeurs de a^2l, b^2m, c^2n, et les substituant dans (1), on trouve

$$\left(\frac{A}{A-a}\right)^2+\left(\frac{B}{B-b}\right)^2+\left(\frac{C}{C-c}\right)^2=1.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Dans les surfaces à centre, on doit avoir constamment

$$\left(\frac{A}{A-a}\right)^2+\left(\frac{B}{B-b}\right)^2+\left(\frac{C}{C-c}\right)^2 \lesseqgtr 1.$$

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Extraits du t. IV du Bulletin du prince Boncompagni.

Février 1871. — Intorno ad un manoscritto dell' Ottica di Vitellione citato da fra Luca Pacioli. — *B. Boncompagni.*

Avril 1871. — Sopra alcuni scritti stampati, finora non conosciuti, di *Domenico Maria Novara da Ferrara.* Notizie communicate a richiesta del principe don *B. Boncompagni* alla Società Copernicana di Scienza ed Arte di Thorn, nelle sedute dei 27 giugno e 15 agosto 1870, da *Massimiliano Curtze.* — Traduzione del Sig. *Filippo Keller.*

Avril 1871. — Ulteriori notizie intorno ad alcuni scritti stampati, finora non conosciuti, di *Domenico Maria Novara da Ferrara,* communicate per incarico del principe don *Baldassarre Boncompagni,* in Roma, alla Società Copernicana per le Science ed Arti, nella sessione del 5 dicembre 1870, da *Massimiliano Curtze.* — Traduzione del Sig. *Filippo Keller.*

Aout 1871. — Intorno ad un opusculo di *Domenico Maria Novara.* — *B. Boncompagni.*

QUESTION.

1117. Supposons qu'un polygone régulier de n côtés soit circonscrit à un cercle et qu'on fasse tourner la moitié de

ce polygone autour d'un axe, passant par l'un des points de contact et par le centre, on trouvera sans grandes difficultés que la mesure V_n du volume engendré par le demi-polygone, en prenant le volume de la sphère inscrite pour unité, est donnée par la formule

$$(1) \qquad V_n = \frac{1}{4}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2, \text{ lorsque } n \text{ est impair,}$$

et par

$$(2) \qquad V_n = \frac{1}{2}\left(1 + \text{séc}^2\,\frac{\pi}{n}\right), \text{ lorsque } n \text{ est pair.}$$

D'ailleurs, en faisant tourner un demi-polygone d'un nombre pair n de côtés autour d'un diamètre du cercle circonscrit, la mesure V'_n du volume engendré, en prenant toujours pour unité le volume de la sphère inscrite, est donnée par la formule

$$(3) \qquad V'_n = \text{séc}\,\frac{\pi}{n}.$$

Déduire : des formules (1) et (2) qu'on a les égalités

$$V_3 - V_5 = \text{le volume de la sphère,}$$
$$V_3 + V_4 + V_5 = 5 \text{ fois le volume de la sphère,}$$

et des formules (1), (2) et (3) qu'on a la suite décroissante

$$V_3,\ V_4,\ V'_4,\ V_5,\ V_6,\ V'_6, \ldots.$$

(Compagnon, professeur au collége Stanislas.)

BULLETIN

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET ASTRONOMIQUES;

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DE MM. ANDRÉ, PAINVIN, RADAU, SIMON ET TISSERAND,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

Commission des Hautes Études.

Président, M. *Chasles.*

Membres du Comité, MM. *J. Bertrand, Puiseux, J.-A. Serret.*

Cette publication, exclusivement consacrée aux Mathématiques et à l'Astronomie, comprend trois Parties principales : 1° *comptes rendus de Livres;* 2° *analyses de Mémoires;* 3° *traductions de Mémoires importants et peu répandus, réimpressions d'Ouvrages rares* et *Mélanges scientifiques.*

« Faire connaître aux savants l'état de la branche des sciences qu'ils cultivent, ce qu'il reste à faire, et le point d'où ils doivent partir s'ils veulent lui faire faire des progrès », tel était le but que s'était proposé M. de Férussac en fondant son *Bulletin,* qui a rendu pendant plusieurs années de si grands services aux géomètres.

Le nouveau *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* se rattache directement, par le but et le plan, à cette utile publication. Il sera accueilli, nous l'espérons, avec la même faveur que son devancier.

Ce BULLETIN, fondé en 1870, paraît régulièrement chaque mois. Il a formé par an, jusqu'en 1872, un volume de 25 à 26 feuilles grand in-8° (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, un accroissement considérable lui a été donné, sans augmentation de prix, et ce Journal forme depuis le 1er janvier 1873 2 volumes par an (1 volume par semestre, avec Tables), comprenant en tout 42 à 43 feuilles grand in-8°.

Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.

Prix pour un an (12 numéros en 2 volumes) :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége	20

TABLE DES MATIÈRES.

Juillet 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

(Deuxième Série.) — Août 1873.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

AOUT 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

BENOIT (R.), Docteur ès sciences. — **Études expérimentales sur la résistance électrique des métaux et sa variation sous l'influence de la température** (*Thèse*). In-4, avec 3 planches; 1873..... 3 fr. 50 c

L'accroissement de la résistance a été suivi dans la plupart des métaux, jusqu'au rouge-cerise, à l'aide de bains maintenus à températures fixes par l'ébullition du mercure (360°), du soufre (440°) et du cadmium (860°). Les résistances ont été mesurées en fonctions des deux unités habituellement employées aujourd'hui : l'unité théorique absolue ou *ohm*, proposée par l'Association Britannique, et l'unité de mercure, autrefois proposée par Pouillet et adoptée par M. Werner-Siemens.

BERTRAND (J.). Membre de l'Institut. — **La Théorie de la Lune d'Aboul-Wefâ**. In-4; 1873.............................. 1 fr. 50 c.

Les astronomes arabes ont été presque exclusivement les disciples des Grecs, et leurs observations n'ont rien ajouté d'essentiel aux théories de Ptolémée. Telle était l'opinion commune des historiens avant la découverte du fragment d'Aboul-Wefâ, signalé et traduit en 1834 par M. Sédillot. Faut-il admettre avec le savant orientaliste que l'astronome arabe avait dès le xe siècle découvert une inégalité de la Lune signalée depuis par Tycho-Brahé, dont elle a été souvent citée comme la découverte capitale? Telle est la question, plusieurs fois discutée par les astronomes, et dont les arguments sont reproduits et résumés dans cet opuscule. — M. Bertrand, entièrement d'accord avec M. Biot, pense qu'il n'y a rien à changer aux idées admises et que la découverte est illusoire.

BRETON (de Champ), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — **Traité du Nivellement**, contenant la théorie et la pratique du nivellement ordinaire et les nivellements expéditifs dits préparatoires ou de reconnaissance. 3e édition, revue, corrigée et augmentée. In-8, avec planches; 1873.. 6 fr.

L'auteur, chargé officiellement, depuis plusieurs années, de suivre les travaux entrepris par M. Bourdaloue pour l'établissement des bases du nivellement général de la France, a profité de cette circonstance pour introduire dans ce Traité les méthodes nouvelles mises en usage à cette occasion, sans toutefois négliger celles qu'employaient les devanciers de M. Bourdaloue.

Cet Ouvrage et le précédent (*Traité du lever des Plans et de l'Arpentage*, un fort vol. in-8°, avec 9 planches; prix : 7 fr. 50 c.) forment ensemble un cours complet d'opérations sur le terrain.

BRIOT et BOUQUET, Professeurs à la Faculté des Sciences. — **Théorie des fonctions elliptiques**. 2e édition. In-4, avec figures; 1873. *Prix pour les souscripteurs*.............................. 30 fr.

Le premier fascicule (pages 1 à 416) vient de paraître; le second sera envoyé aux souscripteurs à la fin de l'année 1873.

SOMMAIRE DES MATIÈRES CONTENUES DANS LE PREMIER FASCICULE. Livre I : *Les fonctions algébriques*. Chap. I : Définitions. Chap. II : Les fonctions algébriques. Chap. III : Exemples de fonctions algébriques. — Livre II : *Fonctions définies par des séries*. Chap. I : Propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable. Chap. II : Fonctions exponentielles et circulaires. Chap. III : La fonction Θ. Chap. IV : Les fonctions elliptiques. — Livre III : *Les intégrales définies*. Chap. I : Propriétés fondamentales des intégrales définies. Chap. II : Exemples d'intégrales définies. Chap. III : Développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable. Chap. IV : Périodes des intégrales définies. — Livre IV : *Propriétés générales des fonctions*. Chap. I : Théorèmes généraux sur les fonctions. Chap. II : Propriétés des fonctions X et Y. Chap. III : Propriétés des fonctions doublement périodiques. Chap. IV : Suite des fonctions doublement périodiques. Chap. V : Développement des fonctions en sommes. Chap. VI : Développement des fonctions en produits. — Livre V : *Fonctions définies par des équations différentielles*. Chap. I : Existence de la fonction intégrale. Chap. II : Exemples de fonctions définies par des équations différentielles. Chap. III : Les fonctions elliptiques définies par des équations différentielles. Chap. IV : Intégration par les fonctions elliptiques.

SUR UN CERTAIN MINIMUM;

PAR MM. A. KORKINE ET G. ZOLOTAREFF,
Professeurs à l'Université de Saint-Pétersbourg.

1. Soit $f(x)$ une fonction entière de x de la forme

(1) $$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes réelles.

En désignant par

$$[A]$$

la valeur absolue de la quantité réelle A, nous nous proposons de déterminer les coefficients

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_n$$

de $f(x)$, de sorte que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\, dx$$

ait la valeur minimum.

2. En supposant maintenant que, de tous les polynômes du $n^{ième}$ degré de la forme (1), $f(x)$ soit celui pour lequel l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\, dx$$

est minimum, nous allons démontrer que toutes les n racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

On voit d'abord que cette équation n'a pas de racines imaginaires.

En effet, en supposant

$$f(x) = \{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^p f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynôme du degré $n - 2p$, qui n'est pas divisible par

$$(x-\alpha)^2 + \beta^2,$$

et p un nombre entier positif, on aura

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx = \int_{-1}^{+1} \{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^p [f_1(x)] dx.$$

Or, la quantité β étant différente de zéro, on peut diminuer β^2 sans changer la forme (1) du polynôme $f(x)$, et, par suite, on diminuera la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx,$$

qui ne sera pas, par conséquent, minimum, contrairement à notre supposition.

On verra de la même manière que toutes les racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont comprises entre -1 et $+1$.

En effet, si l'on avait

$$f(x) = (x-\alpha)^p F(x),$$

α étant supérieur à 1 en valeur absolue, p un nombre entier positif et $F(x)$ un polynôme entier du degré $n-p$, on pourrait diminuer la valeur absolue de α et, par suite, celle de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx,$$

qui est égale à

$$\int_{-1}^{+1} \{[\alpha] - x\}^p [F(x)] dx$$

dans le cas de α positif, et à

$$\int_{-1}^{+1} \{[\alpha] + x\}^p [F(x)] dx$$

si α est négatif; ce qui est impossible en vertu de la supposition.

Il ne sera pas non plus difficile de démontrer que l'équation

$$f(x) = 0$$

a toutes ses racines inégales.

Supposons

$$f(x) = (x - \alpha)^2 F_1(x),$$

α étant compris entre -1 et $+1$, et $F_1(x)$ un polynôme du degré $n-2$, qui peut être encore divisible par $x - \alpha$.

Considérons la fonction

$$f_1(x) = \{(x-\alpha)^2 - h^2\} F_1(x),$$

où h est une quantité infiniment petite. Comme la valeur absolue de

$$(x-\alpha)^2 - h^2$$

est moindre que celle de

$$(x-\alpha)^2,$$

si x n'est pas compris entre

$$\alpha - h \quad \text{et} \quad \alpha + h$$

et la différence

$$(x-\alpha)^2 - \{(x-\alpha)^2 - h^2\}$$

ou h^2, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f_1(x)]\,dx$$

est inférieure à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx,$$

et leur différence est une quantité infiniment petite du second ordre par rapport à h; car les intégrales

$$\int_{\alpha-h}^{\alpha+h} [f(x)]\,dx, \quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} [f_1(x)]\,dx$$

sont du troisième ordre.

Donc, en variant infiniment peu les coefficients de $f(x)$, on diminuera la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx,$$

qui ne sera pas, par conséquent, minimum.

Ainsi toutes les racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

3. Soient

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n$$

ces racines; on aura

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx = (-1)^n \left\{ \int_{-1}^{\alpha_1} f(x)\,dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\,dx - \ldots + (-1)^n \int_{\alpha_n}^{1} f(x)\,dx \right\}.$$

En désignant, pour abréger, la formule

$$\int_{-1}^{\alpha_1}\varphi(x)\,dx-\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi(x)\,dx+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\varphi(x)\,dx-\ldots$$

$$+(-1)^n\int_{\alpha_n}^{1}\varphi(x)\,dx$$

par

$$\mathrm{S}\varphi(x)\,dx,$$

il viendra

$$\int_{-1}^{+1}[f(x)]\,dx=(-1)^n\mathrm{S}f(x)\,dx.$$

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}[f(x)]\,dx$$

peut être considérée comme fonction des coefficients

$$a_1,\quad a_2,\ldots,\quad a_n,$$

car les racines

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\ldots,\quad \alpha_n$$

en sont également des fonctions.

On déterminera les valeurs de

$$a_1,\quad a_2,\ldots,\quad a_n,$$

qui rendent l'intégrale

$$(-1)^n\mathrm{S}f(x)\,dx$$

minimum, par les équations

$$\frac{\partial\mathrm{S}f(x)\,dx}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial\mathrm{S}f(x)\,dx}{\partial a_2}=0,\ldots,\quad \frac{\partial\mathrm{S}f(x)\,dx}{\partial a_n}=0,$$

d'après les règles connues du Calcul différentiel.

En effectuant les différentiations, on aura

$$\mathrm{S}x^{n-1}dx=0,\quad \mathrm{S}x^{n-2}dx=0,\ldots,\quad \mathrm{S}\,dx=0.$$

Ces équations, écrites dans l'ordre inverse, deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots \pm \alpha_n = \varepsilon_1, \\ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \ldots \pm \alpha_n^2 = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1^n - \alpha_2^n + \alpha_3^n - \ldots \pm \alpha_n^n = \varepsilon_n, \end{cases}$$

où, pour un indice quelconque λ, on a

$$\varepsilon_\lambda = \frac{(-1)^\lambda + (-1)^{n+1}}{2}.$$

4. Nous allons maintenant démontrer que les équations (2) ne peuvent être satisfaites que par un seul système de valeurs

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n,$$

dans lequel

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n.$$

Supposant, en effet, qu'il y en ait deux

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n, \\ \alpha'_1 < \alpha'_2 < \alpha'_3 < \ldots < \alpha'_n, \end{cases}$$

on aura aussi

$$\begin{aligned} &\alpha'_1 - \alpha'_2 + \alpha'_3 - \ldots \pm \alpha'_n = \varepsilon_1, \\ &\alpha'^2_1 - \alpha'^2_2 + \alpha'^2_3 - \ldots \pm \alpha'^2_n = \varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\alpha'^n_1 - \alpha'^n_2 + \alpha'^n_3 - \ldots \pm \alpha'^n_n = \varepsilon_n; \end{aligned}$$

donc il viendra

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha'_2 + \alpha_3 + \alpha'_4 + \ldots = \alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha'_3 + \alpha_4 + \ldots, \\ \alpha_1^2 + \alpha'^2_2 + \alpha_3^2 + \alpha'^2_4 + \ldots = \alpha'^2_1 + \alpha_2^2 + \alpha'^2_3 + \alpha_4^2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1^n + \alpha'^n_2 + \alpha_3^n + \alpha'^n_4 + \ldots = \alpha'^n_1 + \alpha_2^n + \alpha'^n_3 + \alpha_4^n + \ldots. \end{cases}$$

Il en résulte que les deux suites

$$\alpha_1, \quad \alpha'_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha'_4, \ldots,$$
$$\alpha'_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha'_3, \quad \alpha_4, \ldots$$

sont composées des mêmes quantités.

Cela devient évident en remarquant que chacune de ces suites contient les n racines d'une seule et même équation du degré n, ce qui résulte immédiatement des équations (4).

Cela admis, on voit sans difficulté que, en vertu des inégalités (3), on aura

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \quad \alpha_2 = \alpha'_2, \ldots,$$

et les deux systèmes (3) sont identiques.

5. Nous ferons voir maintenant que la fonction $f(x)$ contient les seuls degrés pairs de x, lorsque n est pair, et les seuls degrés impairs, si n est impair.

En effet, le polynôme

$$(-1)^n f(-x),$$

étant de la forme

$$x^n + \ldots,$$

donne encore une solution de la question proposée, car on a

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx = \int_{-1}^{+1} [(-1)^n f(-x)]\,dx.$$

Donc les racines

$$-\alpha_1, \quad -\alpha_2, \ldots, \quad -\alpha_n$$

de l'équation

$$f(-x) = 0$$

satisfont aux équations (2), et, d'après ce qui a été dit

dans le n° 4, elles ne diffèrent que par l'ordre des quantités

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n.$$

Comme on a

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n,$$

il viendra

$$-\alpha_n < -\alpha_{n-1} < \ldots < -\alpha_1.$$

Il s'ensuit

$$\alpha_1 = -\alpha_n, \quad \alpha_2 = -\alpha_{n-1}, \ldots.$$

Ainsi on aura

$$f(x) = (-1)^n f(-x),$$

quel que soit x, et la proposition énoncée est démontrée.

6. Avant de chercher la solution des équations générales (2), considérons quelques cas particuliers.

Pour $n = 1$, on aura évidemment

$$f(x) = x.$$

Pour $n = 2$, on aura

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad 2\alpha_1 = -1, \quad \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0,$$
$$f(x) = x^2 - \tfrac{1}{4}.$$

Pour $n = 3$, on aura

$$\alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = 0, \quad 2\alpha_1^2 = 1,$$
$$f(x) = x^3 - \tfrac{1}{2}x.$$

Pour $n = 4$, on obtient

$$\alpha_1 = -\alpha_4, \quad \alpha_2 = -\alpha_3, \quad 2(\alpha_1 - \alpha_2) = -1, \quad 2(\alpha_1^3 - \alpha_2^3) = -1.$$

On trouve aisément une fonction

$$(x - \alpha_1)(x + \alpha_2),$$

quand les deux sommes

$$\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_1^2 - \alpha_2^2$$

sont données. En effet, il vient

$$(x - \alpha_1)(x + \alpha_2) = x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

et, par suite,

$$(x + x_1)(x - \alpha_2) = x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}.$$

Donc

$$f(x) = (x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4})(x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}) = x^4 - \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{1}{16}.$$

Les résultats trouvés sont contenus dans cette formule générale

$$f(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}},$$

que nous allons vérifier.

7. Soit u une fonction de x, qui, étant développée suivant les puissances descendantes de x, commence par le terme

$$\frac{A}{x},$$

où A est une constante différente de zéro. Soit encore $\varphi(x)$ une fonction entière du degré $n+1$, telle que, dans le produit

$$u\varphi(x)$$

développé suivant les puissances descendantes de x, les termes en

$$x^{-1}, \quad x^{-2}, \ldots, \quad x^{-(n+1)}$$

manquent. On aura

(5) $$u\varphi(x) = \psi(x)(1 + \varepsilon),$$

$\psi(x)$ étant une fonction entière du degré n et ε une fonction de la forme

$$\frac{B}{x^{2n+2}} + \frac{C}{x^{2n+3}} + \cdots.$$

Désignons par

$$c_1, \quad c_2, \ldots, \quad c_n$$

les n racines de l'équation

$$\psi(x) = 0.$$

Il viendra

$$\frac{\varphi(x)}{x - c_i} = \text{fonction entière} + \frac{\varphi(c_i)}{x} + \frac{c_i \varphi(c_i)}{x^2} + \frac{c_i^2 \varphi(c_i)}{x^3} + \cdots,$$

et de là

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi(x)}{x - c_i} = \varphi(x) \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} &= \text{fonction entière} \\ &+ \frac{\Sigma \varphi(c_i)}{x} + \frac{\Sigma c_i \varphi(c_i)}{x^2} + \frac{\Sigma c_i^2 \varphi(c_i)}{x^3} + \cdots \end{aligned} \right.$$

Or de l'équation (5) on déduit

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{u'}{u} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi'(x) + \varphi(x) \frac{u'}{u} = \varphi(x) \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varphi(x)\varepsilon'}{1 + \varepsilon}.$$

La fonction

$$\frac{\varphi(x)\varepsilon'}{1 + \varepsilon}$$

étant de la forme

$$\frac{k}{x^{n+2}} + \frac{l}{x^{n+3}} + \cdots,$$

il s'ensuit que les termes avec les puissances

$$x^{-1}, \quad x^{-2}, \ldots, \quad x^{-(n+1)},$$

dans les développements des deux fonctions

$$\varphi(x)\frac{u'}{u}, \quad \varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\psi(x)},$$

suivant les puissances descendantes de x, sont les mêmes.

Ainsi, en ayant égard à l'équation (6), on voit que les sommes

$$\Sigma\varphi(c_i), \quad \Sigma c_i\varphi(c_i), \quad \Sigma c_i^2\varphi(c_i), \ldots, \quad \Sigma c_i^n\varphi(c_i)$$

sont les coefficients des termes en

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \ldots, \quad \frac{1}{x^{n+1}}$$

dans le développement de la fonction

$$\varphi(x)\frac{u'}{u}.$$

8. En faisant maintenant

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

on aura

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^n}\cos\{(n+1)\arccos x\},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\varphi(x)\frac{u'}{u} = -x\frac{\varphi(x)}{x^2-1}.$$

En divisant $\varphi(x)$ par $x^2 - 1$, on aura une équation de la forme

$$\varphi(x) = (x^2 - 1)F(x) + Ax + B,$$

$F(x)$ étant une fonction entière.

On déterminera A et B en faisant dans cette équation

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = +1;$$

il viendra

$$B - A = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \quad B + A = \frac{1}{2^n},$$

et, par suite,

$$B = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad A = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

On aura de plus

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x)\frac{u'}{u} &= -x\frac{\varphi(x)}{x^2 - 1} = -x\mathrm{F}(x) - A - \frac{Bx + A}{x^2 - 1} \\ &= -\left\{ A + x\mathrm{F}(x) + \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^5} + \frac{A}{x^6} + \ldots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Les racines de l'équation

$$\psi(x) = 0$$

étant

$$\cos\frac{\pi}{n+1}, \quad \cos\frac{2\pi}{n+1}, \quad \cos\frac{3\pi}{n+1}, \ldots, \quad \cos\frac{n\pi}{n+1},$$

faisons

$$\alpha_i = \cos\frac{(n - i + 1)\pi}{n+1},$$

et nous aurons

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n,$$

$$\varphi(\alpha_i) = \frac{1}{2^n}(-1)^{n-i+1} = \frac{1}{2^n}(-1)^{n+i+1}.$$

En vertu de la proposition du n° 7, en ayant égard à

l'équation (7), on voit que la somme

$$\Sigma \alpha_i^\lambda \varphi(x_i) = -\frac{1}{2^n}(-1)^{n+1}\Sigma(-1)^{i-1}\alpha_i^\lambda$$

est égale à — B si le nombre entier λ est pair, et à — A si λ est impair.

On aura donc

$$-\frac{1}{2^n}(-1)^{n+1}\Sigma(-1)^{i-1}\alpha_i^\lambda = -\frac{1+(-1)^{n+1+\lambda}}{2^{n+1}},$$

car le second terme de cette équation se réduit à — B lorsque λ est pair, et à — A dans le cas contraire.

On déduit de là

$$\Sigma(-1)^{i-1}\alpha_i^\lambda = \frac{(-1)^\lambda + (-1)^{n+1}}{2} = s_\lambda.$$

En faisant ici

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

on obtient les équations (2), et la formule

$$f(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}}$$

est vérifiée.

9. Dans ce qui précède, nous avons donné la solution complète de la question que nous nous étions proposée. Comme elle a été trouvée par induction, il ne sera pas sans intérêt de la vérifier d'une manière plus directe.

En reprenant les équations

$$\mathrm{S}dx = 0, \quad \mathrm{S}x\,dx = 0, \quad \mathrm{S}x^2dx = 0, \ldots, \quad \mathrm{S}x^{n-1}dx = 0$$

du n° 3, dont la solution comprend celle de la question proposée, on voit facilement que le développement de l'intégrale

$$\mathrm{S}\frac{dz}{x-z} = \frac{\mathrm{S}dz}{x} + \frac{\mathrm{S}z\,dz}{x^2} + \frac{\mathrm{S}z^2dz}{x^3} + \ldots$$

doit commencer, en vertu de ces équations, par le terme

$$\frac{S z^n dz}{x^{n+1}}.$$

Supposons, en premier lieu, n impair. En faisant, pour abréger,

$$U = (x - \alpha_2)(x - \alpha_4)\ldots(x - \alpha_{n-1}),$$
$$V = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n),$$

on aura facilement, en effectuant l'intégration,

$$S\frac{dz}{x - z} = \log\frac{U^2(x^2 - 1)}{V^2} = \log\left\{1 + \frac{(x^2 - 1)U^2 - V^2}{V^2}\right\}.$$

Pour que le développement de

$$S\frac{dz}{x - z}$$

commence par le terme

$$\frac{S z^n dz}{x^{n+1}},$$

il faut que celui de la fonction

$$\frac{(x^2 - 1)U^2 - V^2}{V^2}$$

soit de la forme

$$\frac{A}{x^{n+1}} + \frac{B}{x^{n+2}} + \ldots.$$

Or, V^2 étant un polynôme du degré $n + 1$, il faut que la différence

$$(x^2 - 1)U^2 - V^2$$

ait une valeur constante.

On aura ainsi l'équation indéterminée

$$(x^2 - 1)U^2 - V^2 = \text{const.}$$

En faisant $x = \cos\varphi$, on tire de là, par des méthodes connues,

$$U = \pm C \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\varphi},$$

$$V = \pm C \cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right),$$

$$f(x) = UV = \pm \frac{1}{2} C^2 \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

C étant une constante. Comme la fonction $f(x)$ est de la forme

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots,$$

il viendra

$$\pm \frac{1}{2} C^2 = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, pour n impair, on a

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\cos x}.$$

Soit, en second lieu, n pair. En faisant maintenant

$$U = (x - \alpha_2)(x - \alpha_4)\ldots(x - \alpha_n),$$
$$V = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_{n-1}),$$

on aura

$$S\frac{dz}{x-z} = \log\frac{(x+1)U^2}{(x-1)V^2} = \log\left\{1 + \frac{(x+1)U^2 - (x-1)V^2}{(x-1)V^2}\right\}.$$

En remarquant, comme précédemment, que le développement de

$$S\frac{dz}{x-z}$$

doit commencer par le terme

$$\frac{S z^n dz}{x^{n+1}},$$

et que le polynôme $(x-1)V^2$ est du degré $n+1$, on

conclura que la différence

$$(x+1)U^2-(x-1)V^2$$

est une constante.

On aura de la sorte

$$(x+1)U^2-(x-1)V^2=\text{const.}$$

En faisant $x=\cos\varphi$, on tire de là, sans difficulté,

$$U=\pm C\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi}{2}},\quad V=\pm C\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$f(x)=UV=\pm C^2\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

où C est une constante.

On trouve encore

$$\pm C^2=\frac{1}{2^n},$$

et l'on aura, comme dans le cas précédent,

$$f(x)=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Notre fonction $f(x)$ appartient à une classe de polynômes qu'on peut définir comme il suit :

Considérons l'intégrale

$$u=\int_{-1}^{+1}\frac{F(z)dz}{x-z},$$

où $F(z)$ est une fonction réelle et positive entre les limites $z=-1$ et $z=+1$, et soient $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions entières, dont la dernière du degré m, telles que la différence

$$u\varphi(x)-\psi(x),$$

développée suivant les puissances descendantes de x,

soit de la forme

$$\frac{A}{x^{m+1}} + \frac{B}{x^{m+2}} + \cdots.$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ constituent deux classes de polynômes, et $f(x)$ appartient à la seconde. En effet, si l'on suppose

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad m = n + 1,$$

le polynôme $\psi(x)$ correspondant ne diffère de $f(x)$ que par un facteur constant. Les propriétés des fonctions $\varphi(x)$ ont été étudiées par plusieurs géomètres; celles des polynômes $\psi(x)$ sont jusqu'à présent très-peu connues.

Nous allons démontrer la propriété fondamentale des fonctions $\psi(x)$, qui consiste en ce que *les racines de l'équation*

$$\psi(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. On sait, par la théorie de l'intégrale u, que les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

ont également cette propriété.

Nous empruntons à cette théorie les équations

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{+1} \varphi(z) F(z)\, dz = 0, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} z\varphi(z) F(z)\, dz = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} z^{m-1}\varphi(z) F(z)\, dz = 0, \end{array} \right.$$

$$(9) \qquad \psi(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x - z} F(z)\, dz,$$

sur lesquelles sera fondée notre démonstration.

Désignons par $\nu(x)$ la fonction entière

$$\frac{\varphi(x)}{x - \alpha} = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1},$$

$x - \alpha$ étant un des facteurs de $\varphi(x)$.

Soient encore

$$C_0 = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z)\, dz,$$

$$C_1 = \int_{-1}^{+1} z\nu(z) F(z)\, dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C_m = \int_{-1}^{+1} z^m \nu(z) F(z)\, dz.$$

On a entre les C_i des relations simples exprimées par les équations

$$C_i = \alpha C_{i-1} \; (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

car il est évident que la différence

$$C_i - \alpha C_{i-1} = \int_{-1}^{+1} z^{i-1} (z - \alpha) \nu(z) F(z)\, dz$$

$$= \int_{-1}^{+1} z^{i-1} \varphi(z) F(z)\, dz$$

s'annule en vertu des équations (8). On obtient de la sorte

$$C_1 = \alpha C_0, \quad C_2 = \alpha C_1 = \alpha^2 C_0, \ldots, \quad C_m = \alpha^m C_0.$$

En multipliant les équations

$$C_{m-1} = \alpha^{m-1} C_0 = \int_{-1}^{+1} z^{m-1} \nu(z) F(z) \, dz,$$

$$C_{m-2} = \alpha^{m-2} C_0 = \int_{-1}^{+1} z^{m-2} \nu(z) F(z) \, dz,$$

.................................,

$$C_1 = \alpha C_0 = \int_{-1}^{+1} z \nu(z) F(z) \, dz,$$

$$C_0 = C_0 = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z) \, dz$$

respectivement par les coefficients

$$A_0, \quad A_1, \ldots, \quad A_{m-2}, \quad A_{m-1}$$

de la fonction $\nu(z)$, on aura

$$C_0 \nu(\alpha) = C_0 \varphi'(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \{\nu(z)\}^2 F(z) \, dz = \psi(\alpha) \varphi'(\alpha);$$

car on a évidemment, d'après (9),

$$C_0 = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z) \, dz = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(z)}{z-\alpha} F(z) \, dz = \psi(\alpha).$$

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \{\nu(z)\}^2 F(z) \, dz$$

étant positive, on en conclut que $\psi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ sont des quantités de même signe.

Il s'ensuit, en vertu du théorème connu de Rolle, que les racines de l'équation

$$\psi(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$, chaque racine en particulier étant comprise entre deux racines consécutives de l'équation $\varphi(x) = 0$.

SUR LES POINTS D'INFLEXION D'UNE COURBE DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Voici un moyen facile d'établir que, sur les neuf points d'inflexion d'une cubique, trois au plus sont réels. Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les tangentes en trois de ces points supposés réels, et situés sur la droite

$$P = a\alpha + b\beta + c\gamma = 0;$$

l'équation de la cubique donnée peut s'écrire

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma) = P^3 + 6\alpha\beta\gamma = 0.$$

On démontre de bien des manières que ses points d'inflexion sont sur la courbe

$$\begin{vmatrix} F''_{\alpha^2} & F''_{\alpha\beta} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & F''_{\beta\gamma} & F''_{\gamma^2} \end{vmatrix} = 0,$$

soit, ici,

$$\begin{vmatrix} a^2P & abP + \gamma & acP + \beta \\ abP + \gamma & b^2P & bcP + \alpha \\ acP + \beta & bcP + \alpha & c^2P \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant symétrique a un développement bien connu

$$a^2b^2c^2P^3 - a^2P(bcP + \alpha)^2 - b^2P(caP + \beta)^2$$
$$- c^2P(abP + \gamma)^2 + 2(bcP + \alpha)(caP + \beta)(abP + \gamma) = 0.$$

Réduisant,

$$P(2bc\beta\gamma + 2ca\gamma\alpha + 2ab\alpha\beta - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2) + 2\alpha\beta\gamma = 0.$$

Je triple cette équation et je la retranche de l'équation (1), où j'ai remplacé un facteur P^2 par son développement, ce qui me donne un nouveau lieu des points d'inflexion :

$$4P(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - bc\beta\gamma - ca\gamma\alpha - ab\alpha\beta) = 0.$$

On retrouve la droite donnée et un système de droites imaginaires :

$$(b\beta - c\gamma)^2 + (c\gamma - a\alpha)^2 + (a\alpha - b\beta)^2 = 0.$$

Ces droites coupent la cubique aux six points d'inflexion qu'il restait à trouver et qui sont nécessairement imaginaires. On peut voir que le centre de l'ellipse évanouissante est le pôle de la droite $P = 0$, par rapport aux trois couples de tangentes aux points réels d'inflexion.

SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1864;

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une ellipse, on décrit un cercle sur le grand axe AA' *comme diamètre, et l'on mène deux rayons quelconques* OD, OE *assujettis à faire entre eux un angle constant* α. *On projette leurs extrémités* D *et* E *sur l'ellipse en* P *et* Q *par des perpendiculaires au grand axe. Enfin, par l'une de ces projections* P, *on mène au plan de l'ellipse une perpendiculaire* PP' *de longueur constante* h. *On demande le lieu engendré par la droite qui joint le point* Q *au point* P, *lorsque le couple de rayons* OD, OE *prend dans le plan du cercle toutes les positions imaginables.*

1. Je prends pour axe des z la perpendiculaire au plan

de l'ellipse, menée par son centre, l'origine étant placée à la distance $\frac{h}{2}$ au-dessus de ce plan, et pour axes des x et des y des parallèles aux axes de l'ellipse.

Soient a et b les demi-axes de l'ellipse, β et $\alpha+\beta$ les angles que les rayons OD et OE font avec OA; les coordonnées de P' sont $a\cos\beta$, $b\sin\beta$, $\frac{h}{2}$; celles de Q sont $a\cos(\alpha+\beta)$, $b\sin(\alpha+\beta)$, $-\frac{h}{2}$. Les équations de la droite P'Q sont donc

$$\frac{x-a\cos\beta}{a\cos(\alpha+\beta)-a\cos\beta}=\frac{y-b\sin\beta}{b\sin(\alpha+\beta)-b\sin\beta}=\frac{z-\frac{1}{2}h}{-h},$$

d'où l'on tire

$$\left(z+\frac{1}{2}h\right)\cos\beta-\left(z-\frac{1}{2}h\right)\cos(\alpha+\beta)=\frac{hx}{a},$$

$$\left(z+\frac{1}{2}h\right)\sin\beta-\left(z-\frac{1}{2}h\right)\sin(\alpha+\beta)=\frac{hy}{b}.$$

Élevant ces équations au carré et ajoutant, β est éliminé, et il vient

$$\left(z+\frac{1}{2}h\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}h\right)^2-2\left(z^2-\frac{1}{4}h^2\right)\cos\alpha=h^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

ou

$$2z^2(1-\cos\alpha)+\frac{h^2}{2}(1+\cos\alpha)=h^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

que l'on peut écrire

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{4z^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h^2}=\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{y^2}{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{z^2}{\frac{1}{4}h^2\cot^2\frac{\alpha}{2}}=1,$$

équation d'un hyperboloïde rapporté à son centre et à ses axes.

2. On arrive presque sans calcul au même résultat de la manière suivante :

Soient toujours les mêmes axes : par le point D, élevons $DD' = h$ perpendiculaire au plan de l'ellipse, et joignons D'E. La plus courte distance des droites D'E et OZ est constante et égale à la distance de la corde DE au centre du cercle, c'est-à-dire à $a\cos\frac{\alpha}{2}$; la ligne D'E a, sur le plan de l'ellipse, une inclinaison constante dont la tangente est $\frac{h}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Quand l'angle DOE tourne autour du point O, la droite D'E engendre donc un hyperboloïde de révolution à une nappe, dont le cercle de gorge, situé à la distance $\frac{h}{2}$ au-dessus du plan de l'ellipse, a un rayon égal à $a\cos\frac{\alpha}{2}$, hyperboloïde qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{y^2}{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{4}h^2\cot^2\frac{\alpha}{2}} = 1.$$

La surface engendrée par P'Q s'en déduit, en réduisant les y dans le rapport $\frac{b}{a}$. On obtiendra donc son équation en remplaçant dans la précédente y par $\frac{a}{b}y$, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{y^2}{b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{4}h^2\cot^2\frac{\alpha}{2}} = 1.$$

SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1865;

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une sphère, dont le rayon sera pris pour unité, et un cylindre droit ayant pour base une ellipse de même centre que la sphère et dont les demi-axes seront représentés par les constantes $\sin a$ *et* $\sin b$, *démontrer :*

1° *Qu'il existe sur la sphère deux points* F *et* F' *tels que la somme des arcs de grands cercles* MF *et* MF' *aboutissant à un point quelconque* M *de la courbe d'intersection est constante;*

2° *Que ces deux arcs font des angles égaux avec la tangente au point* M.

Construction graphique des points F *et* F'.

Examen du cas particulier où la somme MF + MF' *est égale à une demi-circonférence de grand cercle.*

1° Je prends le grand axe de l'ellipse pour axe des x, le petit axe pour axe des y et l'axe du cylindre pour axe des z.

Soient x, y, z les coordonnées du point M; x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 celles des points cherchés F et F'; posons de plus

$$\text{arc MF} = V, \quad \text{arc MF'} = V' \quad \text{et} \quad V + V' = 2A.$$

Les coordonnées d'un point de la sphère sont les cosinus des angles que le rayon de ce point fait avec les axes. On a donc

$$\cos V = xx_1 + yy_1 + zz_1, \quad \cos V' = xx_2 + yy_2 + zz_2.$$

Mais il est clair, par raison de symétrie, que si les points F et F′ existent, ils doivent se trouver dans l'un des plans de symétrie, probablement celui des xz, et être symétriquement placés par rapport à l'autre.

Je pose donc

$$x_2 = -x_1,\quad y_1 = y_2 = 0,\quad z_2 = z_1.$$

Les relations précédentes deviennent alors

$$\cos V = xx_1 + zz_1,\quad \cos V' = -xx_1 + zz_1,$$

d'où

$$\cos V + \cos V' = 2zz_1 = 2\cos A \cos \frac{V'-V}{2},$$

$$\cos V - \cos V' = 2xx_1 = 2\sin A \sin \frac{V'-V}{2},$$

et, par suite,

$$\cos \frac{V'-V}{2} = \frac{zz_1}{\cos A},\quad \sin \frac{V'-V}{2} = \frac{xx_1}{\sin A}.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient

$$1 = \frac{z^2 z_1^2}{\cos^2 A} + \frac{x^2 x^2}{\sin^2 A},$$

ou

$$\sin^2 A \cos^2 A = \sin^2 A\, z^2 z_1^2 + \cos^2 A\, x^2 x_1^2;$$

mais on a

$$x_1^2 = 1 - z_1^2,\quad x^2 = \sin^2 a \cos^2 \omega,\quad y^2 = \sin^2 b \sin^2 \omega,$$

et, par suite,

$$z^2 = 1 - \sin^2 a \cos^2\omega - \sin^2 b \sin^2\omega = \cos^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 b)\cos^2\omega,$$

ω étant le paramètre angulaire de la projection du point M sur l'ellipse.

En substituant ces valeurs de x_1^2, x^2, z^2 dans l'équation

obtenue, elle devient

$$\sin^2 A \cos^2 A = [\sin^2 A \cos^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b) \cos^2 \omega] z_1^2 + \cos^2 A \sin^2 a \cos^2 \omega,$$

ou

$$\cos^2 A (\sin^2 A - \sin^2 a \cos^2 \omega) = [\sin^2 A \cos^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b) \cos^2 \omega] z_1^2,$$

d'où

$$z_1^2 = \frac{\cos^2 A (\sin^2 A - \sin^2 a \cos^2 \omega)}{\sin^2 A \cos^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b) \cos^2 \omega}.$$

Cette valeur devant être indépendante de ω, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{\cos^2 b} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b},$$

d'où

$$\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b = \sin^2 a \cos^2 b, \quad \sin^2 a \sin^2 b = \sin^2 A \sin^2 b,$$

$$\sin^2 a = \sin^2 A, \quad A = a.$$

Il en résulte

$$z_1^2 = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b},$$

$$x_1^2 = \frac{\cos^2 b - \cos^2 \omega}{\cos^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 b} = \frac{c^2}{\cos^2 b}, \quad x_1 = \frac{c}{\cos b},$$

en appelant c la distance d'un foyer de l'ellipse, base du cylindre, à son centre.

De là résulte la construction suivante des points F, F'.

Par l'extrémité du petit axe de l'ellipse donnée, menez une parallèle au grand axe qui rencontre la sphère aux points N, N'; tirez le rayon ON; par le foyer, élevez une perpendiculaire au grand axe qui rencontre ON en P; prenez sur le grand axe OQ = OQ' = OP; les perpendiculaires au plan de l'ellipse, élevées par les points Q et Q', couperont la sphère aux points F et F'.

La courbe d'intersection du cylindre et de la sphère porte le nom d'*ellipse sphérique*; les points F et F′ en sont les *foyers*.

Remarque. — On aurait pu prendre $A = \pi - \omega$, d'où $2A = 2\pi - 2\omega$; mais alors il aurait fallu prendre $z_1 = -\frac{\cos a}{\cos b}$, c'est-à-dire que, l'ellipse sphérique étant dans l'hémisphère supérieur, les foyers seraient dans l'hémisphère inférieur, et *vice versa*. Les foyers de l'une des deux courbes sont donc aussi foyers de l'autre.

Si l'on cherche les foyers dans le plan des yz, il faut, dans les calculs précédents, permuter x et y, x_1 et y_1, a et b, $\sin\omega$ et $\cos\omega$; il en résulte $y_1^2 = \frac{\sin^2 b - \sin^2 a}{\cos^2 a}$, valeur négative : ces foyers sont donc imaginaires.

Si l'on a

$$V + V' = \pi,$$

il en résulte

$$\cos V + \cos V' = 0$$

ou

$$(x_1 + x_2)x + (y_1 + y_2)y + (z_1 + z_2)z = 0.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante : on y satisfait en posant $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, $z_2 = -z_1$, c'est-à-dire qu'il suffit de prendre pour F et F′ deux points diamétralement opposés sur la sphère, ce qui était évident *a priori*.

2° Pour démontrer le théorème relatif à la tangente en un point de l'ellipse sphérique, on peut remplacer la tangente par l'arc de grand cercle tangent au même point; la démonstration est alors tout à fait semblable à celle du théorème analogue sur la tangente à l'ellipse plane; il suffit d'y remplacer les lignes droites par des arcs de grands cercles.

On en déduit, pour la construction de l'arc de grand cercle tangent à l'ellipse sphérique et passant par un point donné sur la courbe, ou extérieur à la courbe, les mêmes règles, *mutatis mutandis*, que pour mener une tangente à l'ellipse plane, ainsi que les théorèmes suivants :

L'ellipse sphérique est lieu des points de la surface de la sphère également distants de l'un des foyers et de la circonférence décrite de l'autre foyer comme pôle avec une distance polaire égale à la corde du grand axe.

Cette circonférence est le lieu des points symétriques de l'autre foyer, par rapport aux grands cercles tangents à l'ellipse.

Si, d'un point extérieur P, *on mène des arcs de grands cercles tangents à l'ellipse, ils forment avec les arcs* PF, PF′ *respectivement des angles égaux.*

NOTE SUR UN POINT REMARQUABLE DU PLAN D'UN TRIANGLE;

PAR M. E. LEMOINE.

Les propositions qui suivent n'ont pas, croyons-nous, encore été remarquées. La démonstration en est assez simple pour qu'il suffise de les énoncer ici.

A, B, C, sommets d'un triangle dont les côtés BC, CA, AB ont pour longueurs a, b, c.

1° Si l'on mène respectivement dans les angles A, B, C des antiparallèles à BC, CA, AB, et qu'on prenne les milieux A′, B′, C′ de la partie de ces antiparallèles comprise entre les deux côtés de l'angle, les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un point ω, que nous nommerons *centre des médianes antiparallèles*.

2° Soit O un point du plan ; si, par O, je mène des parallèles aux trois côtés du triangle ABC, elles rencontrent les côtés en six points, sommets d'un hexagone inscriptible à une conique, et circonscriptible à une autre.

La conique circonscrite sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que O sera intérieur à l'ellipse de surface maximum inscrite dans ABC, sur cette ellipse, ou à l'extérieur.

3° Si O coïncide avec ω, l'ellipse circonscrite est un cercle dont le centre est le milieu de la ligne qui joint ω au centre du cercle circonscrit ; le rayon ρ de cette circonférence est donné par la formule

$$\rho^2 = R^2 \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4° Les trois cordes que le cercle intercepte sur les trois côtés sont proportionnelles aux cubes de ces côtés.

5° Les trois côtés de l'hexagone, qui ne sont pas compris sur ceux du triangle, sont égaux et ont pour valeur

$$l = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

6° Les antiparallèles, menées par ω aux trois côtés, sont égales.

7° La distance d de ω au centre du cercle circonscrit est donnée par la formule

$$d^2 = R^2 - 3l^2.$$

8° Si $A\omega$ coupe BC en α, on a

$$A\alpha = 2 \frac{bc}{b^2 + c^2} l_a,$$

l_a étant la médiane partant de A du triangle ABC.

9° Le centre des médianes antiparallèles ω est aussi le point de rencontre des droites qui, partant des sommets, divisent le côté opposé en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents. C'est donc, d'après M. Hossard, le point tel que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés soit un minimum.

10° Par

A	je mène à	AC	une perpendiculaire	$\alpha'\gamma'$,
B	»	AB	»	$\alpha'\beta'$,
C	»	CB	»	$\beta'\gamma'$,
A	»	AB	»	$\alpha''\beta''$,
B	»	BC	»	$\beta''\gamma''$,
C	»	AC	»	$\alpha''\gamma''$.

On voit facilement que $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ passent au centre du cercle circonscrit.

Cela posé

$\alpha'\alpha''$	coupant	BC	en	A_1,
$\beta'\beta''$	»	AC	»	B_1,
$\gamma'\gamma''$	»	AB	»	C_1,

les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite.

Soient

A''	le conjugué harmonique de	A_1	par rapport aux points	B et C,
B''	»	B_1	»	A et C,
C''	»	C_1	»	B et A,

les trois droites AA'', BB'', CC'' passent au centre des médianes antiparallèles.

CALCUL DU RAYON DE LA SPHÈRE INSCRITE DANS LE TÉTRAÈDRE;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Docteur ès sciences.

Considérons le tétraèdre SABC, qui est compris sous les arêtes

$$SA = a, \quad SB = b, \quad SC = c,$$

issues du sommet S, lesquelles forment entre elles les angles

$$BSC = \lambda, \quad CSA = \mu, \quad ASB = \nu.$$

Prenons le sommet S pour origine des coordonnées et les droites SA, SB, SC pour axes respectifs des x, y, z positifs.

Soient x, y, z les coordonnées du centre O de la sphère inscrite, et r le rayon de cette sphère. On sait que la distance d d'un point (x, y, z) à un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

est donnée par la formule

$$(1) \qquad d^2 = \pm (Ax + By + Cz + D)\frac{\Delta}{U},$$

où

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} U^2 = A^2\sin^2\lambda &+ 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + B^2\sin^2\mu &+ 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + C^2\sin^2\nu &+ 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{aligned} \right.$$

Nous obtenons donc la distance du centre O au plan SBC

des yz, en faisant dans (1) et (2) $A = 1$, $B = C = D = 0$; cette distance étant z, nous avons ainsi l'égalité

$$r = \frac{\Delta x}{\sin\lambda}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{r\sin\lambda}{\Delta}.$$

On verrait de même que

$$y = \frac{r\sin\mu}{\Delta}, \quad z = \frac{r\sin\nu}{\Delta}$$

sont les deux autres coordonnées du centre O de la sphère inscrite. Il s'ensuit que les équations

$$(3) \qquad \frac{x}{\sin\lambda} = \frac{y}{\sin\mu} = \frac{z}{\sin\nu}$$

sont celles de la droite SO, également inclinée sur les trois faces SBC, SCA, SAB du trièdre S.

Dans la formule (1), remplaçons x, y, z par les valeurs précédentes, d par r et A, B, C, D par $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, -1$; nous obtenons la distance du centre O de la sphère à la quatrième face ABC du tétraèdre. Il en résulte l'équation

$$\begin{aligned} r + \sqrt{\begin{aligned} &\frac{\sin^2\lambda}{a^2} + \frac{2}{bc}\left(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda\right) \\ &+ \frac{\sin^2\mu}{b^2} + \frac{2}{ca}\left(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu\right) \\ &+ \frac{\sin^2\nu}{c^2} + \frac{2}{ab}\left(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu\right) \end{aligned}} \\ = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)\Delta \\ = r\left(\frac{\sin\lambda}{a} + \frac{\sin\mu}{b} + \frac{\sin\nu}{c}\right) - \Delta, \end{aligned}$$

qui fournit la valeur de r. Élevant les deux membres au carré, afin de faire disparaître le radical, et réduisant, on

change cette équation dans la suivante :

$$4\left(a\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}+b\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\right.$$
$$\left.+c\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}r^2$$
$$-2(bc\sin\lambda+ca\sin\mu+ab\sin\nu)\Delta r+abc\Delta^2=0;$$

elle donne les rayons des deux sphères, tangentes aux quatre faces, qui ont leurs centres situés sur la droite (3).

Si l'on a soin de changer, dans cette équation, successivement le signe de λ, μ, ν, on obtiendra les rayons des six autres sphères, qui sont tangentes aux plans des quatre faces du tétraèdre.

Ces sphères ont leurs centres situés, deux par deux, sur les droites respectives

$$-\frac{x}{\sin\lambda}=\frac{y}{\sin\mu}=\frac{z}{\sin\nu},$$
$$\frac{x}{\sin\lambda}=-\frac{y}{\sin\mu}=\frac{z}{\sin\nu},$$
$$\frac{x}{\sin\lambda}=\frac{y}{\sin\mu}=-\frac{z}{\sin\nu},$$

qui, étant dirigées dans l'intérieur des trois trièdres

SA'BC, SAB'C, SABC',

formés par deux des arêtes SA, SB, SC et le prolongement de la troisième, sont les lieux des points équidistants des faces de ces trièdres.

Nous laissons au lecteur le soin de la discussion des valeurs de r, qui ne manque pas d'intérêt.

RAYON DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE AU TÉTRAÈDRE EN FONCTION DES ARÊTES;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Docteur ès sciences.

Soient S, A, B, C les quatre sommets du tétraèdre. Représentons par a, b, c les trois arêtes SA, SB, SC issues du sommet S, et par λ, μ, ν les inclinaisons mutuelles BSC, CSA, ASB de ces arêtes.

Prenons le sommet S pour origine des coordonnées et les droites SA, SB, SC pour les axes OX, OY, OZ.

Désignons par x, y, z les coordonnées du centre O de la sphère circonscrite et par R le rayon de cette sphère. Le centre O sera le point d'intersection des trois plans élevés sur les milieux des arêtes a, b, c, perpendiculairement à ces arêtes; par conséquent $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ seront les projections orthogonales du rayon $SO = R$ sur les trois axes des coordonnées OX, OY, OZ, de sorte que, si α, β, γ sont les inclinaisons de SO sur ces trois axes, nous avons

$$(1) \qquad a = 2R\cos\alpha, \quad b = 2R\cos\beta, \quad c = 2R\cos\gamma.$$

Cela posé, projetons le rayon SO et la ligne brisée $x + y + z$ successivement sur SO et sur les trois axes de coordonnées; nous obtenons les équations

$$-R + x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$
$$-R\cos\alpha + x + y\cos\nu + z\cos\mu = 0,$$
$$-R\cos\beta + x\cos\nu + y + z\cos\lambda = 0,$$
$$-R\cos\gamma + x\cos\mu + y\cos\lambda + z = 0,$$

qui, devant être compatibles, exigent que l'on ait le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est *la relation qui existe entre les six angles que forment entre elles quatre droites* SO, SA, SB, SC *issues d'un même point* S.

Dans ce déterminant, mettons à la place de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs $\frac{a}{2R}$, $\frac{b}{2R}$, $\frac{c}{2R}$ tirées des égalités (1); l'équation précédente deviendra

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{2R} & \frac{b}{2R} & \frac{c}{2R} \\ \frac{a}{2R} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{b}{2R} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{c}{2R} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en multipliant la première ligne et la première colonne chacune par $2R$,

$$(I)\qquad \begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation donne la valeur de R en fonction des trois arêtes a, b, c issues du même sommet S et des inclinaisons mutuelles λ, μ, ν de ces arêtes. On en tire, en

effet,

$$4R^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$- b \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \end{vmatrix},$$

ou, en effectuant et développant,

$$(\text{II}) \quad \left\{ \begin{aligned} 4R^2\Delta = {} & a^2\sin^2\lambda + 2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ & + b^2\sin^2\mu + 2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ & + c^2\sin^2\nu + 2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{aligned} \right.$$

Dans cette expression, Δ représente la quantité

$$1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

La valeur de $4R^2\Delta$ peut s'exprimer en fonction des six arêtes du tétraèdre. Représentons, en effet, par a', b', c' les trois arêtes BC, CA, AB qui sont respectivement opposées aux arêtes $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Les triangles SBC, SCA, SAB nous donnent

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda, \quad b'^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mu,$$
$$c'^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\nu,$$

d'où nous tirons

$$\cos\lambda = \frac{b^2 + c^2 - a'^2}{2bc}, \quad \cos\mu = \frac{c^2 + a^2 - b'^2}{2ca}, \quad \cos\nu = \frac{a^2 + b^2 - c'^2}{2ab}.$$

Substituons ces valeurs dans le second membre de l'équation (II) ; nous obtenons d'abord

$$\begin{aligned} & 4a^2b^2c^2[a^2\sin^2\lambda + 2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)] \\ & \quad = 2b^2b'^2c^2c'^2 - a^4a'^4 + (2b^4c^4 - c^4a^4 - a^4b^4) \\ & \qquad + 2a^2b^2c^2(2a^2 - b^2 - c^2) + 2a^2a'^2(2b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \\ & \qquad - 2b^2b'^2(c^2a^2 + b^2c^2) - 2c^2c'^2(a^2b^2 + b^2c^2), \end{aligned}$$

puis, par permutation circulaire,

$$\begin{aligned}4a^2b^2c^2[b^2\sin^2\mu + 2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)]\\ = 2c^2c'^2a^2a'^2 - b^4b'^4 + (2c^4a^4 - a^4b^4 - b^4c^4)\\ + 2a^2b^2c^2(2b^2 - c^2 - a^2) + 2b^2b'^2(2c^2a^2 + a^2b^2 + b^2c^2)\\ - 2c^2c'^2(a^2b^2 + c^2a^2) - 2a^2a'^2(b^2c^2 + c^2a^2),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}4a^2b^2c^2[c^2\sin^2\nu + 2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)]\\ = 2a^2a'^2b^2b'^2 - c^4c'^4 + (2a^4b^4 - b^4c^4 - c^4a^4)\\ + 2a^2b^2c^2(2c^2 - a^2 - b^2) + 2c^2c'^2(2a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\\ - 2a^2a'^2(b^2c^2 + a^2b^2) - 2b^2b'^2(c^2a^2 + a^2b^2).\end{aligned}$$

Ajoutant ces trois dernières égalités membre à membre et réduisant, nous trouvons que le second membre de l'équation (II), multiplié par $4a^2b^2c^2$ est égal à

$$2b^2b'^2c^2c'^2 + 2c^2c'^2a^2a'^2 + 2a^2a'^2b^2b'^2 - a^4a'^4 - b^4b'^4 - c^4c'^4;$$

il nous vient donc

$$\text{(III)}\quad R^2 = \frac{2b^2b'^2c^2c'^2 + 2c^2c'^2a^2a'^2 + 2a^2a'^2b^2b'^2 - a^4a'^4 - b^4b'^4 - c^4c'^4}{16a^2b^2c^2\Delta},$$

ou

$$\text{(IV)}\quad R^2 = \frac{(aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa')(cc' + aa' - bb')(aa' + bb' - cc')}{16a^2b^2c^2\Delta}.$$

Cette expression peut s'écrire sous forme de déterminant

$$\text{(V)}\qquad 16a^2b^2c^2\Delta R^2 = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on observe que le volume V du tétraèdre est donné par

$$36V^2 = a^2b^2c^2\Delta,$$

on trouve que

$$576\,V^2R^2 = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\text{(VI)}\quad \left\{ \begin{array}{l} 24\,VR \\ = \sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(cc'+aa'-bb')(aa'+bb'-cc')}. \end{array} \right.$$

Posant

$$aa' + bb' + cc' = 2P^2,$$

on a encore

$$R = \frac{1}{6V}\sqrt{P^2(P^2 - aa')(P^2 - bb')(P^2 - cc')}.$$

Cette dernière expression a été donnée, sans démonstration, par M. Brassine, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1re série, t. VI, p. 227, année 1847.

RELATION ENTRE LES VOLUMES CORRESPONDANTS DE DEUX FIGURES HOMOGRAPHIQUES;

Par M. Édouard AMIGUES.

Supposons que l'on ait trois axes rectangulaires; imaginons, dans ce système de coordonnées, deux figures homographiques, dont les points correspondants soient définis par ces relations

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz + d, \\ Y &= a'x + b'y + c'z + d', \\ Z &= a''x + b''y + c''z + d''. \end{aligned}$$

Considérons quatre points de l'une des figures et les quatre points correspondants de l'autre, et formons le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce produit sera, d'après les trois relations qui existent entre les coordonnées de deux points correspondants,

$$\begin{vmatrix} X-d & Y-d' & Z-d'' & 1 \\ X_1-d & Y_1-d' & Z_1-d'' & 1 \\ X_2-d & Y_2-d' & Z_2-d'' & 1 \\ X_3-d & Y_3-d' & Z_3-d'' & 1 \end{vmatrix};$$

multipliant la dernière colonne par d, d', d'' et ajoutant aux trois autres, ce produit devient

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

De là la formule

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Le premier membre représente six fois le volume d'un tétraèdre ; le premier facteur du second membre, six fois le volume du tétraèdre correspondant. Nous désignerons les volumes de ces tétraèdres par V et v. Quant au second facteur du second membre, nous l'appellerons Δ et nous

remarquerons que $\Delta \lesseqgtr 0$, puisque, à chaque point X, Y, Z, doit correspondre un seul point xyz. Nous aurons alors, suivant le signe de Δ,

$$\pm V = v\Delta.$$

Il est facile de voir que la même relation existe entre les volumes de deux polyèdres correspondants et, par suite, de deux figures correspondantes quelconques, limitées par des surfaces planes ou courbes.

En effet, la formule (1) nous montre que, si quatre points de l'une des figures sont dans un même plan, il en est de même des quatre points correspondants de l'autre figure, ce qui est le propre de l'homographie. Mais elle va nous montrer aussi que si, dans une des figures, deux points sont d'un même côté par rapport à un plan, il en sera de même pour les points et le plan correspondants de l'autre figure, et que, au contraire, si deux points sont de part et d'autre d'un plan dans l'une des figures, la disposition de la figure correspondante sera la même. Il nous suffira, pour le voir, de considérer l'équation $V = 0$ comme représentant un plan passant par trois points, X, Y, Z étant les coordonnées courantes; $v = 0$ représentera alors le plan correspondant, x, y, z étant les coordonnées courantes. D'après la relation (1), il est évident que, si, en substituant à la place de X, Y, Z tantôt X_4, Y_4, Z_4 et tantôt X_5, Y_5, Z_5, V conserve le même signe, il en sera de même de v, quand, à la place de x, y, z, on substituera tantôt x_4, y_4, z_4 et tantôt x_5, y_5, z_5, et inversement. Ceci prouve bien que les positions relatives de deux points, par rapport à un plan, se conservent d'une figure à l'autre.

On voit alors que, si un polyèdre est convexe, le polyèdre correspondant l'est aussi, et que deux polyèdres correspondants quelconques peuvent être décomposés en

une somme arithmétique de tétraèdres se correspondant deux à deux; c'est évidemment tout ce qu'il fallait établir.

Nous laisserons au lecteur le soin de poser le principe analogue de la Géométrie plane, et nous donnerons quelques applications, en les choisissant de préférence parmi les exemples simples, pour lesquels la formule (1) s'obtient d'une manière tout à fait élémentaire.

1° Trouver le volume de l'ellipsoïde $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ (coordonnées rectangulaires).

Si nous posons

$$X=\frac{a}{R}x,\quad Y=\frac{b}{R}y,\quad Z=\frac{c}{R}z,$$

nous voyons que la figure homographique est la sphère

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{R^3} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, en remarquant que cette relation s'étend à deux volumes correspondants quelconques W et w,

$$W=\frac{abc}{R^3}w. \tag{2}$$

En particulier, en appelant V le volume de l'ellipsoïde et v celui de la sphère homographique,

$$V=\frac{abc}{R^3}v,$$

$$V=\tfrac{4}{3}\pi abc.$$

2° Le parallélépipède construit sur trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde a un volume constant.

Faisant la même transformation homographique que tout à l'heure, on obtient la formule générale (2).

Il est facile de voir que trois demi-diamètres conjugués correspondent à trois rayons rectangulaires de la sphère, et que le parallélépipède ci-dessus correspond au cube qui a pour arêtes ces trois rayons. Le volume de ce cube étant R^3, celui du parallélépipède, d'après la formule (2), doit être abc.

3° L'ellipsoïde $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ et l'ellipsoïde homographique, obtenu en posant

$$X=x,\quad Y=y,\quad Z=x+y+z,$$

ont même volume; car, dans ce mode de transformation,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1.$$

Tous les volumes correspondants doivent donc être équivalents; les deux surfaces quelconques

$$f(X,Y,Z)=0\quad\text{et}\quad f(x,y,x+y+z)=0$$

limitent des volumes équivalents.

4° Soit le tore

$$4d^2(X^2+Y^2)=(X^2+Y^2+Z^2+l^2-R^2)^2;$$

en transformant cette surface homographiquement, on obtient un anneau irrégulier, dont l'équation est

$$\begin{aligned}4d^2[(ax+by+cz+d)^2+(a'x+b'y+c'z+d')^2]\\=[(ax+by+cz+d)^2+(a'x+b'y+c'z+d')^2\\+(a''x+b''y+c''z+d'')^2+l^2-R^2]^2,\end{aligned}$$

et dont le volume est

$$2\pi^2 R^2 l \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

5° Si l'on fait la transformation homographique

$$\begin{aligned} X &= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + d, \\ Y &= x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' + d', \\ Z &= x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'' + d'', \end{aligned}$$

en supposant

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1, \\ \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' &= 0, \\ \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' &= 0, \\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' &= 0; \end{aligned}$$

comme

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos a' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

les figures correspondantes ont même volume. On peut voir d'ailleurs qu'elles sont égales, en rapportant la seconde figure à trois nouveaux axes rectangulaires qui se trouvent naturellement indiqués.

Conclusion. — Il résulte de ce qui précède que, dans toute figure transformée homographiquement en coordonnées cartésiennes, les surfaces en Géométrie plane, les volumes en Géométrie de l'espace se trouvent simplement multipliés par un facteur constant, comme il arrive des longueurs lorsque d'une figure on passe à la figure semblable. L'utilité de l'homographie ne se borne donc pas à l'étude des propriétés descriptives.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1873.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Une surface du second ordre S étant donnée, ainsi que deux points A et B sur cette surface, il existe une infinité de surfaces du second ordre Σ, qui sont tangentes en A et en B à la surface S. On propose de trouver : 1° le lieu géométrique des centres des surfaces Σ; 2° le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener parallèlement à un plan donné; 3° le lieu géométrique des points de contact de ces mêmes surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener par une droite donnée.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Par un point donné dans l'intérieur d'un cercle donné, mener deux cordes qui se coupent sous un angle donné et dont le produit soit maximum ou minimum. On examinera en particulier le cas où le point donné est à l'extérieur du cercle.

PHILOSOPHIE.

1re *question*. — On inscrit, dans un cercle donné, tous les triangles dont deux côtés sont respectivement parallèles à deux droites fixes données; on demande le lieu des centres des cercles inscrits dans ces triangles.

2e *question*. — On donne un prisme triangulaire, et l'on fait, dans ce prisme, une section *abc* parallèle aux bases; on joint un point O quelconque, pris dans le plan de la base supérieure, aux trois sommets de la section *abc*, et l'on prolonge les trois droites ainsi formées jus-

qu'à leur rencontre aux points A, B et C avec le plan de la base inférieure. On demande à quelle distance de la base supérieure il faut faire la section *abc*, pour que le tétraèdre OABC et le prisme donné soient équivalents.

RHÉTORIQUE.

1re *question*. — Étant données deux sphères, on inscrit dans la première un cône droit à base circulaire dont le côté est égal au diamètre de base, et l'on circonscrit à la seconde un cylindre; on trouve que le volume du cône est la $\frac{1}{11}$ partie du volume du cylindre. On demande le rapport des rayons des deux sphères.

2e *question*. — Année tropique, calendrier.

SECONDE.

1re *question*. — Étant donnée une pyramide triangulaire tronquée, on propose de mener, par l'une des arêtes de la base supérieure, un plan qui divise le volume du tronc en deux parties équivalentes.

2e *question*. — Trouver deux nombres, connaissant la somme de leurs inverses et la somme des racines carrées de ces deux nombres. Application au cas où la première somme serait 0,1025 et la seconde 9.

TROISIÈME.

1re *question*. — On donne deux circonférences se coupant en D et C; par l'un des points communs, on mène une sécante qui coupe O en B et O′ en B′; on trace BO et B′O′. Ces deux droites se coupent en M : lieu géométrique.

2e *question*. — Trouver le plus petit nombre possible qui, divisé par 2, donne pour reste 1; divisé par 3, donne pour reste 2; divisé par 4, donne pour reste 3, etc.; et, enfin, par 10, donne pour reste 9.

BIBLIOGRAPHIE.

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES, par MM. *Briot* et *Bouquet,* professeurs à la Faculté des Sciences, 1 vol. in-4; Paris, 1873. Gauthier-Villars.

L'excellent Traité des fonctions doublement périodiques de MM. Briot et Bouquet, depuis longtemps épuisé, était devenu très-rare. Le public réclamait avec instance une nouvelle édition de cet Ouvrage, qui avait rendu tant de services aux jeunes géomètres.

MM. Briot et Bouquet ont compris que c'était pour eux presque un devoir que de satisfaire l'impatience du public. Le premier fascicule de la nouvelle édition vient de paraître : l'ordre des matières, les démonstrations sont modifiés; de nombreuses additions ont été introduites. Ainsi l'on remarque au commencement une théorie des fonctions algébriques qui n'existait pas dans l'ancienne édition, la recherche de quelques intégrales définies, l'introduction de propositions nouvelles dues à M. Hermite, et développées par lui dans son Cours à l'École Polytechnique, et quelques théorèmes plus élémentaires qui ont été l'objet de remarques faites dans ces derniers temps.

Si nous mettions de côté les matières introduites dans la nouvelle édition, nous donnerions la préférence à la première, dans laquelle le mode d'exposition nous paraît plus logique et plus facile à suivre. Nous ne comprenons pas pourquoi les auteurs ont introduit les mots nouveaux et les distinctions subtiles créés par les Allemands. Nous voyons avec regret le mot holotrope substitué au mot monodrome, introduit pour la pre-

mière fois par Cauchy; les mots méromorphe, holomorphe, etc.; le langage de Cauchy était suffisamment clair. Nous comprenons encore moins l'introduction de la sphère et du plan antipode; la sphère surtout nous paraît parfaitement inutile et de nature à compliquer les choses, sans ajouter la moindre idée nouvelle. Il faut en général se méfier de ce qui vient de l'autre côté du Rhin; nos voisins cherchent souvent à faire passer pour neuves des idées, en les habillant adroitement de dénominations différentes des nôtres.

La nouvelle démonstration que MM. Briot et Bouquet donnent de la continuité des séries nous paraît préférable à l'ancienne; elle est, du reste, plus complète. Cette démonstration est au fond celle d'Abel; ils ont rectifié une erreur qui s'était glissée dans l'énoncé du théorème de Cauchy, sur la formule de Maclaurin.

Le défaut de la plupart des traités relatifs à la théorie des fonctions elliptiques est de ne pas montrer assez nettement comment on est conduit à l'étude des fonctions doublement périodiques; c'est aussi de débuter par un ordre d'idées étranges qui ne pourraient être celles d'un inventeur. Il est quelquefois bon d'exposer les sciences dans un ordre différent de celui dans lequel elles se sont réellement présentées, mais il faut que cet ordre soit logique, naturel, et tel qu'il *eût pu se présenter*.

Dans la première édition de leur Ouvrage, MM. Briot et Bouquet nous font voir que les premières intégrales qui se présentent à nous, après celles que l'on est parvenu à calculer, définissent des fonctions à deux périodes. De l'idée même de la double périodicité découle une série de propriétés curieuses qui permettent de classer et de définir nettement les fonctions doublement périodiques. En cherchant à former directement les plus simples de ces fonctions, on est conduit de la façon du

monde la plus naturelle à les développer en produits, et les numérateurs ainsi que les dénominateurs de ces produits sont précisément les fonctions Θ, Θ_1, H, H_1, ou leurs équivalentes. Ces fonctions, plus simples que les fonctions doublement périodiques, doivent alors être étudiées à fond, et de leur étude découle toute la théorie des fonctions elliptiques, ainsi que l'a montré simplement M. Hermite, dans son *Cours d'Analyse*.

Nous voyons avec regret MM. Briot et Bouquet renoncer à cet ordre logique et présenter dans leur nouvelle édition la théorie des fonctions Θ, sans montrer quelle en est la véritable origine.

En résumé, les géomètres liront avec plaisir les nouvelles théories émises dans l'édition dont nous avons donné l'analyse très-succincte, et ils attendront sans doute avec impatience la publication du second fascicule. Le grand nombre de formules contenues dans cet Ouvrage remarquable, la multitude des documents qu'il contient le rendent précieux aux personnes familiarisées avec le maniement des fonctions elliptiques; la clarté et la rigueur des démonstrations en font un ouvrage réellement didactique, le seul peut-être à la portée des commençants. H. Laurent.

QUESTION.

1118. Sur une droite AB comme base, on décrit trois triangles isoscèles ABC, ABC′, ABC″, dont les hauteurs soient respectivement égales aux produits obtenus en multipliant la moitié de la base par les nombres *un, deux, trois* : démontrer que la somme des trois angles au sommet de ces triangles est égale à deux droits.

(Lionnet.)

FRENET (F.), Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal.** Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, aux Élèves de ces Écoles et aux personnes qui se préparent à la licence ès Sciences mathématiques. 3ᵉ édition. In-8°, avec figures dans le texte; 1873. 7 fr. 50 c.

Cet Ouvrage a pour but de familiariser avec l'emploi du Calcul infinitésimal les personnes qui étudient cette branche des Mathématiques, et de leur faire nettement saisir, par des applications variées, le sens et la portée des théories générales. Il se compose de trois Parties. Dans les deux premières, dont l'une est consacrée au Calcul différentiel et l'autre au Calcul intégral, le titre des paragraphes apprend à quel genre de considérations se rapporte la solution de chaque problème. Cette indication est omise dans les Questions diverses formant la troisième Partie; on a laissé au lecteur, préparé déjà par ce qui précède, le soin d'y suppléer.

En présence des ressources multipliées qu'offraient à l'auteur les œuvres des maîtres, les collections savantes et les journaux scientifiques, la destination particulière du Livre a déterminé le choix des matières et les limites qu'on s'est imposées. Le cadre adopté est celui du programme de la Licence ès Sciences mathématiques. La partie de ce programme qui figure dans le Cours de Mathématiques spéciales a naturellement amené certains développements et un assez grand nombre d'Exercices, appropriés surtout aux besoins des élèves qui suivent ce Cours. Comme la notation de Leibnitz, employée ici, n'a pas encore accès dans l'enseignement secondaire, on a pris soin de l'expliquer en tête du Livre.

Extrait de la Table des matières.

Iʳᵉ Partie, *Calcul différentiel :* Introduction. — Différentiation des fonctions explicites d'une seule variable. — Différentiation des fonctions explicites de plusieurs variables. — Différentiation des fonctions implicites. — Dérivées d'ordre quelconque. — Développements de fonctions en séries. — Changement de variables. — Élimination des constantes et des fonctions. — Vraie valeur des expressions qui se présentent sous des formes indéterminées. — Maxima et minima. — Tangentes aux courbes planes. — Points singuliers. Construction des courbes. — Rayons de courbure et développées des courbes planes. — Géométrie à trois dimensions. — Enveloppes des lignes et des surfaces.

IIᵉ Partie, *Calcul intégral :* Formules fondamentales. — Intégration par substitution. — Intégration par parties. — Intégration par les fractions rationnelles. — Expressions qu'on intègre en les rendant rationnelles. — Intégrations par réductions successives. — Intégration des fonctions de plusieurs variables. — Quadrature des courbes planes. — Rectification des courbes. — Cubature. — Quadrature des surfaces courbes. — Changement de variables sous le signe d'intégration. — Intégrales définies. — Équations linéaires à coefficients constants. — Équations linéaires à coefficients variables. — Équations différentielles non linéaires. — Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. — Équations différentielles simultanées. — Équations aux différentielles partielles linéaires et du premier ordre. — Calcul des variations.

IIIᵉ Partie, *Questions diverses.*

CATALAN (E.). — **Traité élémentaire des Séries.** Grand in-8, avec figures; 1860 .... 5 fr.

La Librairie Gauthier-Villars a acquis de la Librairie Leiber l'édition entière de cet Ouvrage de M. Catalan.

L'Auteur a eu pour but d'être utile aux jeunes gens peu familiarisés avec l'Analyse infinitésimale, en leur rendant accessible l'une des théories les plus fécondes et les plus délicates des Mathématiques.

Titres des Chapitres. — Chap. I. Préliminaires, définitions. — Chap. II. Théorèmes sur les convergences. — Chap. III. Sommation de quelques séries. — Chap. IV. Application des quadratures à la sommation des séries; digression sur les séries divergentes. — Chap. V. Développements en séries; applications. — Chap. VI. Sommation des séries, quatre méthodes; applications. — Chap. VII. Transformations de séries.

TABLE DES MATIÈRES.

Août 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

(Deuxième Série.) — Septembre 1873.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ
PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

SEPTEMBRE 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE;

PAR M. LÉON RODET,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

La démonstration du grand principe de Physique de la gravitation universelle se compose, on le sait, de deux parties : dans la première, on s'appuie sur les lois expérimentales du mouvement planétaire, énoncées par Képler, et l'on en déduit que les planètes doivent être soumises à une force attractive, dirigée constamment vers le foyer de leur trajectoire où se trouve le centre de l'astre principal autour duquel elles gravitent, et que la grandeur de cette force varie en raison inverse de la distance au centre du corps attirant.

Dans la deuxième partie, réciproque de cette première, on étudie, *a priori*, quel doit être le mouvement d'un point matériel, lancé dans l'espace avec une certaine vitesse initiale et soumis à l'action d'une force attractive définie comme celle du mouvement planétaire, et l'on démontre que, dans ces conditions, le point doit décrire une cônique dont l'espèce dépend uniquement des grandeurs relatives de la vitesse initiale, de la distance au centre d'attraction, et de l'intensité de l'action de ce centre évaluée à l'unité de distance.

Pendant longtemps, la démonstration de ce double théorème n'a été donnée que par les procédés du Calcul différentiel et intégral. Or les démonstrations ainsi données ont un double inconvénient : d'abord elles ne sont pas abordables à tout le monde, et l'on ne se contente plus beaucoup, aujourd'hui que bien des démons-

trations de haute science ont été rendues abordables, de lire après l'énoncé d'un principe de cette importance : « On démontre que... ». Puis, il faut bien le reconnaître, l'Analyse mathématique conduit à coup sûr au résultat cherché celui qui s'est rendu maître de cette machine admirable; mais elle lui fournit le résultat définitif *tout fait*, sans lui permettre de voir par quels états intermédiaires il passe, par quel enchaînement d'idées la solution découle des données du problème.

Aussi, maintenant que l'on tend à vulgariser la science le plus possible, a-t-on songé à chercher des démonstrations plus élémentaires du principe de Newton; mais on s'est borné jusqu'ici à la première partie de la question, à la détermination de la force attractive du mouvement planétaire, ou plutôt de l'accélération par laquelle cette force se manifeste dans le mouvement des corps célestes. Je citerai, entre autres, les démonstrations données par M. Collignon dans son *Cours de Mécanique* (3e année, 1re Partie), et par M. Resal dans son *Traité de Cinématique pure*. Cette dernière démonstration a été reproduite dernièrement par MM. Ch. Brisse et Ch. André, dans leur *Cours de Physique à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales*, récemment publié.

Il ne m'est pas tombé sous les yeux d'étude, par des procédés élémentaires, du problème réciproque de la recherche de la trajectoire d'un point animé d'une accélération du genre de celle qui retient les planètes dans leur orbite elliptique. Cette question me paraissant avoir un certain intérêt, je me suis préoccupé d'en obtenir la solution, et je suis enfin parvenu, après un peu de travail, à deux démonstrations du principe de Newton. L'une, tout élémentaire, pourrait figurer dans un Cours de Cosmographie à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, car elle ne s'appuie que sur les propriétés

géométriques des sections coniques (courbes usuelles) que l'on donne dans l'enseignement de cette classe. Par malheur, elle est un peu longue, assez pénible; et, si je la publie un jour, ce ne sera guère que comme exemple de ce que l'on peut faire même avec des notions très-élémentaires.

La seconde démonstration, que je donne ici, est simple et rapide; et cependant elle n'exige pas d'autres connaissances que celles qui s'acquièrent en Mathématiques spéciales. Je comprends parmi ces notions celles relatives au rayon de courbure des coniques, puisque la théorie fort simple de la détermination de ce dernier est donnée dans l'ouvrage de Salmon (*Traité des sections coniques*), traduit par MM. Resal et Vaucheret, qui est aujourd'hui entre les mains de presque tous les élèves.

J'emploie fréquemment des formules empruntées à cet Ouvrage, entre autres celles si élégantes qu'il obtient en faisant intervenir la longueur b' du demi-diamètre conjugué de celui qui passe au point dont les coordonnées sont x et y. Ces formules n'étant pas encore d'un usage habituel chez nous, j'ai soin d'indiquer à côté le numéro de la traduction française où elles sont démontrées.

Bien que la première partie du problème ait déjà été traitée, je la reprends ici, parce que j'établis dans cette première partie certaines formules simples qu'il me suffit de rappeler en traitant la question inverse.

I. — *Accélération du mouvement planétaire.*

Je suppose démontré, parce que ce théorème se trouve partout, que de la constance de l'aire décrite dans des temps égaux, ou, si l'on veut, de la constance de la *vitesse aréolaire*, résulte que l'accélération du mouvement pla-

nétaire doit passer constamment par le foyer de l'orbite.

Je prends immédiatement un arc MM′ (*) de la trajectoire, parcouru par le mobile en un temps très-petit θ. Le chemin curviligne MM′ résulte de la composition de deux mouvements de lois différentes, par exemple d'un mouvement uniforme suivant la tangente, en vertu de la vitesse v au point M, et d'un mouvement varié dirigé, d'après la loi des aires, suivant le rayon vecteur MF.

Si nous menons par M′ des parallèles à la tangente et au rayon vecteur, nous aurons en MM_1 l'espace $v\theta$ qui serait parcouru en vertu du mouvement uniforme tangentiel, en MG la quantité dont le point mobile glisserait le long du rayon vecteur en vertu de l'accélération G au point M.

Le déplacement rectiligne MG se décompose à son tour en deux autres de même loi que lui : MH, sur la tangente, est dû à l'accélération qui fait varier la grandeur de la vitesse; MI, sur la normale, provient de l'*accélération centripète* j du mouvement, laquelle, on le sait, a toujours pour valeur

$$j = \frac{v^2}{R},$$

R désignant le rayon de courbure de la trajectoire en M.

Or, quand deux mouvements sont de même loi, les espaces parcourus dans un temps θ sont entre eux comme les accélérations qui les font parcourir :

$$\frac{G}{j} = \frac{MG}{MI} = \frac{MF}{FP} = \frac{1}{\sin\varphi},$$

en désignant, avec Salmon, par φ l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur et par P le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la tangente en M.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Donc

$$G = \frac{j}{\sin\varphi} = \frac{v^2}{R\sin\varphi},$$

et, comme (Salmon, nos 242 et 188) dans l'ellipse

$$R = \frac{b'^3}{ab}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{b'},$$

$$G = \frac{av^2}{b'^2}.$$

Mais (Salmon, n° 173)

$$b'^2 = a^2 - e^2x^2 = (a - ex)(a + ex) = \rho\rho_1;$$

il en résulte

$$(\alpha) \qquad G = \frac{av^2}{\rho\rho_1}.$$

N.-B. — Cette valeur est remarquable par son analogie de forme avec celle de l'accélération du mouvement circulaire

$$j = \frac{v^2}{R}.$$

Continuons encore à transformer cette formule, pour ne plus y conserver qu'une seule variable, le rayon vecteur ρ.

Nous voyons sur la figure que

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{F'P'}{FP} = \frac{h'}{h},$$

et, comme $hh' = b^2$ ou $h' = \frac{b^2}{h}$,

$$\rho_1 = \rho\frac{b^2}{h^2}$$

et

$$G = \frac{a}{b^2}\frac{v^2h^2}{\rho^2}.$$

Mais $v\theta h$ est le double de l'aire MM'F décrite par le rayon vecteur dans le temps θ; si s^2 désigne la vitesse aréolaire constante,

$$hv\theta = 2s^2\theta,$$
$$h^2v^2 = 4s^4;$$

de là

$$G = \frac{a}{b^2}\frac{4s^4}{\rho^2},$$

ou, en remplaçant $\frac{b^2}{a}$ par le paramètre p,

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2}.$$

Enfin, dans l'ellipse, l'aire entière πab est décrite dans le temps T de la révolution de la planète; donc

$$\pi ab = s^2 T$$

et

$$4s^4 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2},$$

d'où, dans ce cas spécial,

$$G = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{1}{\rho^2} = \frac{\mathcal{G}}{\rho^2}.$$

J'appelle ici $\mathcal{G}$ le facteur $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, accélération que posséderait le mobile s'il était à une distance 1 du foyer. D'après la troisième loi de Képler, cette quantité est constante pour un même système planétaire.

II. — *Accélération sur une hyperbole ou une parabole.*

1° *Hyperbole.* — Tous les calculs que nous venons de faire pour le mouvement elliptique, toutes les pro-

priétés sur lesquelles nous nous sommes appuyé, toutes les formules dont nous nous sommes servi sont applicables sans modification à l'hyperbole. Ainsi, un point qui aurait pour trajectoire une de ces courbes devrait être animé, le long du rayon vecteur, d'une accélération dont la valeur serait encore

$$(\alpha) \qquad G = \frac{av^2}{\rho\rho_1},$$

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2}.$$

Mais ici nous ne pourrons pas pousser plus loin la transformation, parce qu'il n'y a pas lieu de chercher à exprimer la vitesse aréolaire s^2 en fonction de la surface totale, ni de parler d'un temps de révolution.

2° *Parabole.* — Mais le cas de la parabole demande à être étudié à part; car, dans cette courbe, notre première formule (α) n'a pas lieu d'exister.

On peut bien prévoir *a priori* ce qu'elle deviendra; en effet, supposons que nous partions de la formule pour l'ellipse, et remplaçons ρ_1 par $2a - \rho$, elle devient

$$G = \frac{av^2}{\rho(2a - \rho)} = \frac{av^2}{\rho\left(2 - \frac{\rho}{a}\right)},$$

et, pour $a = \infty$,

$$G = \frac{v^2}{2\rho}.$$

Mais on peut établir cette formule directement.

Nous trouverions ici, comme dans l'ellipse,

$$G = \frac{j}{\sin\varphi} = \frac{v^2}{R\sin\varphi}.$$

Or, dans la parabole, HT étant la sous-tangente et MH

l'ordonnée,

$$\sin\varphi = \frac{FP}{MF} = \frac{MH}{MT} = \frac{y}{\sqrt{y^2+4x^2}} = \sqrt{\frac{2px}{2x(p+2x)}} = \sqrt{\frac{p}{2\rho}},$$

et (Salmon, n° 245)

$$R = \frac{N}{\sin^2\varphi}, \quad \text{d'où} \quad R\sin\varphi = \frac{N}{\sin\varphi} = \frac{p}{\sin^2\varphi} = 2\rho;$$

donc

$$(\alpha') \qquad G = \frac{v^2}{2\rho}.$$

N.-B. — Lorsque le mobile passe au sommet de la parabole, l'accélération qui le retient sur cette courbe et la lui fait parcourir est *la moitié* de celle qui lui ferait décrire un cercle autour du foyer.

Comme tout à l'heure, on trouverait

$$hv\theta = 2s^2\theta, \quad v^2 = \frac{4s^4}{h^2};$$

or

$$h^2 = \rho^2\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}\rho p;$$

on en déduit successivement

$$v^2 = \frac{8s^4}{\rho p},$$

et

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2}.$$

Ainsi la formule (β) est applicable à la parabole.

En résumant les résultats de cette première partie de la question, nous avons obtenu *deux* expressions de l'accélération du mouvement d'un point qui décrit une

conique, savoir :

$$(\alpha) \qquad G = \frac{av^2}{\rho\rho_1} \quad \text{pour les courbes à centre,}$$

$$(\alpha') \qquad G = \frac{v^2}{2\rho} \quad \text{pour la parabole,}$$

et

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2},$$

formule qui s'applique également aux trois courbes du second ordre.

III. — *Trajectoire d'un point gravitant.*

Nous pouvons maintenant aborder la seconde partie de la question : supposer qu'un point M est soumis à la fois à une vitesse v qui l'entraîne suivant MM_1 et à une accélération Γ dirigée constamment vers un point fixe F, cette dernière variant comme l'inverse du carré de la distance FM ; et chercher quelle peut être la trajectoire du point M.

Nous trouverons alors successivement les caractères suivants pour cette trajectoire :

1° D'après la loi des aires, l'accélération passant par un point fixe, la trajectoire est plane, et la vitesse aréolaire du rayon vecteur est constante.

Si nous appelons s^2 cette vitesse aréolaire et φ l'angle que fait la vitesse v avec le rayon vecteur, nous avons ainsi une première loi à satisfaire

$$(1) \qquad v\theta\rho\sin\varphi = 2s^2\theta \quad \text{ou} \quad s^2 = \frac{1}{2}v_0\rho_0\sin\varphi_0,$$

en désignant par l'indice o la valeur des données au moment où le corps a commencé à se mouvoir.

2° Le mouvement résultant de la composition de deux mouvements *de loi différente,* la trajectoire, en si petits fragments que nous la décomposions, est courbe; et l'arc de courbe MM′ est défini par cette condition que le rayon de courbure en M doit être tel que l'on ait

$$j = \frac{v^2}{R} = \Gamma \sin\varphi,$$

d'où, en remplaçant v par sa valeur en fonction de s^2, Γ par son expression, supposée de la forme $\frac{n^3}{\rho^2}$, on tirera, en dernière analyse,

$$(2) \qquad R \sin^3\varphi = 4\,\frac{s^4}{n^3} = \text{const.}$$

Donc : *la trajectoire est une courbe plane dont le rayon de courbure, multiplié par le cube du sinus de l'angle que fait la vitesse avec le rayon vecteur, donne un produit constant.*

Remonter de cette propriété à une définition plus connue de la courbe est un problème qui dépasse les connaissances de Mathématiques spéciales, dans lesquelles nous voulons nous maintenir. Il faut donc tourner la difficulté; voici comment :

Il existe *une conique,* et une seule, ayant son foyer en F, dont le rayon de courbure en M est la valeur que nous venons de trouver pour R. En effet, cette conique est assujettie à cinq conditions, savoir : un foyer donné et un contact du second ordre avec le cercle de rayon R ayant son centre sur la normale à la vitesse v en M.

Que faudrait-il pour obliger le point à parcourir cette conique? Lui appliquer en M, suivant le rayon vecteur MF, une accélération dont nous avons déterminé plus haut la valeur

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2}.$$

Or, dans les coniques, on a

$$R = \frac{p}{\sin^3 \varphi}.$$

En effet, dans les coniques à centre,

$$R = \frac{b'^3}{ab} = \frac{b^2}{a} \frac{b'^3}{b^3},$$

et, dans la parabole,

$$R = \frac{N}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{p}{\sin \varphi}.$$

On peut donc, dans la relation (2), remplacer $R \sin^3 \varphi$ par le paramètre p.

Si nous prenons maintenant cette valeur de p pour la reporter dans l'expression de G, nous trouvons

$$G = \frac{n^3}{4s^2} \frac{4s^2}{\rho^2} = \frac{n^3}{\rho^2} = \Gamma.$$

Ainsi l'accélération qui obligerait le point à parcourir la conique en question est précisément Γ.

Donc le point parcourra la conique ; c'est cette conique qui sera sa trajectoire réelle.

Ainsi *un point matériel, gravitant autour d'un centre attractif, décrit une conique qui a ledit centre pour foyer.*

Quelle est l'*espèce* de la conique trajectoire? C'est ce que nous allons chercher à déterminer.

IV. — *Espèce de la conique trajectoire.*

Il nous est facile de tracer notre conique trajectoire.

Puisque nous avons la longueur $p = \frac{4s^4}{n^3}$ du paramètre, portons-la en MK sur le rayon vecteur MF, et

élevons en K la perpendiculaire KN : N est le point où la normale MN rencontre l'axe principal de la courbe; donc cet axe est placé sur NF.

Faisons maintenant avec la tangente un angle QMP égal à φ; MQ sera le prolongement du second rayon vecteur de la courbe, et alors trois cas peuvent se présenter :

1° MQ rencontre l'axe de façon que N soit *entre les deux foyers :* la courbe est une *ellipse;*

2° MQ est parallèle à l'axe, et la courbe est une *parabole;*

3° MQ rencontre l'axe de telle sorte que N soit *en dehors de* FF' : la courbe est une *hyperbole.*

Définissons analytiquement les conditions qui caractérisent chacun de ces trois cas, en commençant par le cas intermédiaire, plus simple à traduire en calcul algébrique.

Si MQ est parallèle à l'axe, c'est que

$$(a) \qquad 2\varphi = \omega,$$

en appelant ω l'angle MFN.

Or, dans le triangle KNF, nous avons

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{NK}{NF} = \frac{p \cot\varphi}{\rho - p},$$

et la condition (a) devient alors

$$\frac{2\operatorname{tang}\varphi}{1 - \operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{p\cot\varphi}{\rho - p},$$

d'où

$$(b) \qquad \operatorname{tang}^2\varphi = \frac{p}{2\rho - p},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}=\frac{p}{2\rho-p}, \quad \text{d'où} \quad \sin^2\varphi=\frac{p}{2\rho},$$

ou, dans les conditions initiales du mouvement,

$$(c) \qquad \sin^2\varphi_0=\frac{p}{2\rho_0}.$$

Mais nous avons, d'après la formule (1),

$$\sin^2\varphi_0=\frac{4s^4}{v_0^2\rho_0^3},$$

et, d'autre part,

$$p=\frac{4s^4}{n^3}=\frac{4s^4}{G_0\rho_0^2}.$$

A l'aide de ces valeurs, (c) devient, en définitive,

$$(d) \qquad \frac{1}{v_0^2}=\frac{1}{G_0 2\rho_0},$$

ou

$$(e) \qquad \frac{v_0^2}{\rho_0}=2G_0;$$

c'est notre formule (β').

On verra facilement maintenant à quelles conditions nous aurons les autres courbes.

Pour l'ellipse, il faut que φ soit *plus grand* que dans la parabole; donc

$$(c') \qquad \sin^2\varphi_0>\frac{p}{2\rho_0},$$

$$(d') \qquad \frac{1}{v_0^2}>\frac{1}{G_0 2\rho_0},$$

et enfin

$$(e') \qquad \frac{v_0^2}{\rho_0}<2G_0.$$

Pour l'hyperbole, il nous faudrait, au contraire,

$$(c'') \qquad \sin^2\varphi_0 < \frac{p}{2\rho_0},$$

$$(d'') \qquad \frac{1}{v_0^2} < \frac{1}{G_0\, 2\rho_0},$$

et

$$(e'') \qquad \frac{v_0^2}{\rho_0} > 2G_0.$$

Ce sont les conditions connues, et il est facile de voir qu'elles reviennent à la formule (β) des coniques à centre; en effet, cette formule, pour l'ellipse, nous donne

$$G = \frac{av^2}{\rho(2a-\rho)},$$

ou

$$(\varepsilon') \qquad \frac{v^2}{\rho} = G\left(2 - \frac{\rho}{a}\right),$$

tandis que, pour l'hyperbole, nous aurions

$$G = \frac{av^2}{\rho(2a+\rho)},$$

ou

$$(\varepsilon'') \qquad \frac{v^2}{\rho} = G\left(2 + \frac{\rho}{a}\right).$$

V. — *Calcul des éléments de l'orbite.*

Reste à calculer les éléments géométriques de l'orbite; on y parviendra comme il suit :

Grand axe. — Des formules (ε') et (ε''), ou mieux (α), en remplaçant G par $\frac{n^2}{\rho_0^2}$, on tire

$$\frac{n^2}{\rho_0} = \frac{av_0^2}{2a \mp \rho_0},$$

d'où

$$a = \frac{\pm n^3 \rho_0}{2n^3 - v_0^2 \rho_0},$$

ou, si l'on veut,

$$a = \frac{\pm G_0 \rho_0}{2G_0 - \frac{v_0^2}{\rho_0}},$$

le signe supérieur se rapportant à l'ellipse, le signe inférieur se rapportant à l'hyperbole. Pour le cas de la parabole, cette valeur devient infinie.

On a déjà remarqué que la longueur de l'axe principal ne dépendait que des grandeurs relatives de v_0, ρ_0 et du coefficient n^3, ou, comme nous l'avons appelé en traitant de l'ellipse, $\mathcal{G}$, l'accélération à l'unité de distance. L'angle φ_0 que fait la vitesse initiale avec le rayon vecteur n'intervient point ici.

Petit axe. — Ayant la valeur de a et, d'autre part, sachant que

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{4s^4}{n^3},$$

on en tirera facilement

$$b^2 = \frac{\pm 4s^4 \rho_0}{2n^3 - v_0^2 \rho_0},$$

ou, en remplaçant le carré de la vitesse aréolaire $4s^4$ par $v_0^2 \rho_0^2 \sin^2 \varphi$,

$$b^2 = \frac{\pm v_0^2 \rho_0^3 \sin^2 \varphi_0}{2n^3 - v_0^2 \rho_0}.$$

Excentricité. — On déduira l'excentricité, soit des valeurs une fois connues de a et de b, soit directement, en partant de l'équation de la courbe

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega},$$

dans laquelle ω est l'angle qui nous a servi plus haut [formules (a), (b), (c)], et qui est défini par la condition que

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{p \cot\varphi}{\rho - p}.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$e = \sqrt{1 - \frac{4s^4(2n^3 - v_0^2\rho_0)}{n^6\rho_0}},$$

valeur qui se réduit à 1 pour le cas de la parabole, est plus petite que 1 pour l'ellipse, plus grande que 1 pour l'hyperbole.

Vitesse. — Enfin on peut aisément calculer la grandeur de la vitesse à chaque instant.

Nous aurons, en effet,

$$(\varepsilon')(\varepsilon'') \qquad \frac{v^2}{\rho} = G\left(2 \mp \frac{\rho}{a}\right) = \frac{n^3}{\rho^2}\left(2 \mp \frac{\rho}{a}\right),$$

d'où

$$v^2 = n^3\left(\frac{2}{\rho} \mp \frac{1}{a}\right),$$

et, en remplaçant $\frac{1}{a}$ par l'inverse de la valeur du grand axe donnée plus haut, savoir

$$\frac{1}{a} = \mp\left(\frac{v_0^2}{n^3} - \frac{2}{\rho_0}\right),$$

il en résulte

$$v^2 = v_0^2 + 2n^3\left(\frac{1}{\rho} \mp \frac{1}{\rho_0}\right),$$

le signe supérieur se rapportant toujours à l'ellipse, l'inférieur à l'hyperbole.

Dans la parabole, la formule (e) nous donne simplement

$$v^2 = \frac{2n^2}{\rho}.$$

Dans cette courbe, la vitesse est à chaque instant en raison inverse de la raison carrée de la distance au centre d'attraction.

NOTE SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (*);

PAR M. L. P.

Trouver le lieu des sommets des triangles de périmètre constant formés par deux tangentes à une ellipse donnée, et la corde des contacts.

1. *Lemme.* — « Si d'un point M, (x, y) du plan, on mène la tangente MT à l'ellipse, et que OD soit le diamètre parallèle à cette tangente, on a

$$\frac{\overline{MT}^2}{\overline{OD}^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

en supposant que l'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Cette proposition, plus ou moins connue, est une conséquence immédiate du théorème général suivant, dû à Newton :

« Si par deux points O et O' on mène deux sécantes

(*) *Voir* question 552, t. XIX, 1re série, p. 406.



quelconques parallèles qui coupent une courbe aux points $R_1, R_2, \ldots; R'_1, R'_2, \ldots$, respectivement, on a

$$\frac{OR_1 . OR \ldots}{O'R'_1 . O'R'_2 \ldots} = \text{const. »}$$

On démontre facilement que, si $f(x,y) = 0$ est l'équation de la courbe, et que x_0, y_0, x'_0, y'_0 soient les coordonnées des points O et O', on a

$$\frac{OR_1 . OR_2 . OR_3 \ldots}{O'R'_1 . O'R'_2 . O'R'_3 \ldots} = \frac{f(x_0, y_0)}{f(x'_0, y'_0)}.$$

De là résulte la proposition énoncée.

2. Soient maintenant MA, MB les deux tangentes à l'ellipse, A et B les points de contact, φ et φ_1 les paramètres angulaires de ces points, x et y les coordonnées du point M, on a

$$(1) \quad \begin{cases} \overline{AB} = \sqrt{a^2(\cos\varphi - \cos\varphi_1)^2 + b^2(\sin\varphi - \sin\varphi_1)^2}, \\ \overline{MA} = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1}\ \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}, \\ \overline{MB} = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1}\ \sqrt{a^2\sin^2\varphi_1 + b^2\cos^2\varphi_1}. \end{cases}$$

La droite AB, qui passe par les deux points A et B, et qui est aussi la polaire du point M, peut être représentée par l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$\frac{X}{a}\cos\frac{\varphi + \varphi_1}{2} + \frac{Y}{b}\sin\frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2},$$

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1;$$

d'où il suit, en identifiant,

$$(2) \quad \cos\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{x}{a}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}, \quad \sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{y}{b}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}.$$

3. Si maintenant on pose

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &D = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad H = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = D - 1, \\ &E = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}, \end{aligned}\right.$$

les relations (2) donnent immédiatement

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{D}}, \qquad \cos\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{x}{a}\,\frac{1}{\sqrt{D}}, \\ &\sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{D}}, \qquad \sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{y}{b}\,\frac{1}{\sqrt{D}}; \end{aligned}\right.$$

on peut toujours, pour abréger la discussion relative aux signes des radicaux, supposer x et y positifs, et φ_1 algébriquement plus grand que φ.

Des relations (4) on déduit encore

$$\sin(\varphi_1 + \varphi) = \frac{\dfrac{2xy}{ab}}{D}, \qquad \cos(\varphi_1 + \varphi) = \frac{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}{D},$$

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \frac{2\sqrt{H}}{D}, \qquad \cos(\varphi_1 - \varphi) = \frac{1 - H}{D};$$

d'où

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi + \sin\varphi \cos\varphi_1 = \frac{\dfrac{2xy}{ab}}{D},$$

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi - \sin\varphi \cos\varphi_1 = \frac{2\sqrt{H}}{D},$$

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi - \sin\varphi_1 \sin\varphi = \frac{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}{D},$$

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi + \sin\varphi_1 \sin\varphi = \frac{1 - H}{D},$$

et, par conséquent,

$$(5)\ \begin{cases} \sin\varphi_1\cos\varphi = \dfrac{\dfrac{xy}{ab}+\sqrt{H}}{D}, & \cos\varphi_1\cos\varphi = \dfrac{1-\dfrac{x^2}{a^2}}{D}, \\[2ex] \sin\varphi\cos\varphi_1 = \dfrac{\dfrac{xy}{ab}-\sqrt{H}}{D}, & \sin\varphi_1\sin\varphi = \dfrac{1-\dfrac{y^2}{b^2}}{D}. \end{cases}$$

On déduit de là, en ajoutant la somme des carrés de ces dernières égalités, prises deux à deux et convenablement choisies,

$$(6)\ \begin{cases} D^2\cos^2\varphi = \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\sqrt{H}\right)^2, & D^2\cos^2\varphi_1 = \left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\sqrt{H}\right)^2, \\[2ex] D^2\sin^2\varphi = \left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{x}{a}\sqrt{H}\right)^2, & D^2\sin^2\varphi_1 = \left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{x}{a}\sqrt{H}\right)^2. \end{cases}$$

4. Ces formules établies, on trouve d'abord, eu égard aux relations (4),

$$\overline{AB} = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{D}}\sqrt{a^2\sin^2\frac{\varphi_1+\varphi}{2}+b^2\cos^2\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}.$$

On a donc les valeurs suivantes :

$$(7)\ \begin{cases} \overline{MA} = \sqrt{H}\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}, \\ \overline{MB} = \sqrt{H}\sqrt{a^2\sin^2\varphi_1 + b^2\cos^2\varphi_1}, \\ \overline{AB} = \dfrac{2\sqrt{H}}{\sqrt{D}}\sqrt{a^2\sin^2\dfrac{\varphi+\varphi_1}{2}+b^2\cos^2\dfrac{\varphi+\varphi_1}{2}}. \end{cases}$$

Ces formules, qui offrent une analogie assez remarquable, peuvent conduire à des relations intéressantes; nous n'indiquerons que celles qui sont utiles au calcul que nous avons en vue.

En ayant égard aux relations (4), (5) ou (6), on trouve très-facilement

$$(8)\quad \begin{cases} \overline{AB} = \dfrac{2ab\sqrt{H}\sqrt{E}}{D}, \\ \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \dfrac{2H}{D^2}[H(x^2+y^2) + a^2b^2E], \\ \overline{MA}.\overline{MB} = \dfrac{H}{D}\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) + c^4}, \end{cases}$$

où

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

5. Maintenant la recherche de l'équation du lieu demandé ne présente plus de difficulté. D'après la définition de ce lieu, on doit avoir

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{AB} = 2p,$$

$2p$ étant la valeur constante du périmètre.

On a d'abord, en remplaçant $\overline{AB}$ par sa valeur,

$$(9)\qquad \overline{MA} + \overline{MB} = 2p - \frac{2ab}{D}\sqrt{H}\sqrt{E};$$

puis, élevant au carré en ayant égard aux relations (8) et opérant quelques réductions visibles,

$$(10)\quad \begin{cases} +H\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) + c^4} \\ \quad = 2p^2D - 4abp\sqrt{H}\sqrt{E} - H(x^2+y^2-a^2-b^2). \end{cases}$$

Élevant encore au carré, on a

$$(11)\quad \begin{cases} -a^2b^2H^2 - p^2H[D(x^2+y^2-a^2-b^2) - 4a^2b^2E] + p^4D^2 \\ \quad = 2abp[H(x^2+y^2-a^2-b^2) - 2p^2D]\sqrt{H}\sqrt{E}. \end{cases}$$

D'où l'on conclut définitivement, pour l'*équation rationnelle du lieu* :

$$((12))\quad \left\{ \begin{array}{l} \{a^2b^2H^2+p^2H[D(x^2+y^2-a^2-b^2)-4a^2b^2E]-p^4D^2\}^2 \\ \qquad = 4a^2b^2p^2HE[H(x^2+y^2-a^2-b^2)-2p^2D]^2, \end{array} \right.$$

équation dans laquelle on a posé

$$(12\ bis)\quad \left\{ \begin{array}{l} D=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2};\quad H=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=D-1, \\ \qquad E=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}. \end{array} \right.$$

6. Les équations qui précèdent donnent lieu à plusieurs remarques qu'il est bon de noter.

Nous voyons, par l'équation (9), qu'on doit avoir

$$\frac{ab\sqrt{H}\sqrt{E}}{D}<p,$$

c'est-à-dire que les points de la courbe, pour lesquels la somme des valeurs absolues des côtés du triangle est égale à $2p$, sont dans l'intérieur de la courbe

$$ab\sqrt{H}\sqrt{E}=pD.$$

Ainsi 1° : *Les points du lieu, pour lesquels la somme des valeurs absolues des côtés du triangle* MAB *est égale à $2p$, sont dans l'intérieur de la courbe*

$$(13)\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left[\frac{x^2}{a^4}\left(1-\frac{p^2}{b^2}\right)+\frac{y^2}{b^4}\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)\right]=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4};$$

c'est une courbe du quatrième ordre.

L'équation (10) nous montre que, dans la somme

$$\overline{MA}+\overline{MB}\pm\overline{AB}=2p,$$

les deux tangentes MA et MB y entreront par leur somme ou par leur différence, suivant que la quantité

$$2p^2D-H(x^2+y^2-a^2-b^2)\pm 4abp\sqrt{H}\sqrt{E}$$

est positive ou négative, le signe — ou + correspondant au cas où le côté AB est ajouté ou retranché ; par suite :

2° *Les points du lieu* ((12)), *pour lesquels les deux tangentes* MA, MB *entrent, dans la somme* $2p$, *par la somme de leurs valeurs absolues ou par leur différence, sont séparés par la courbe*

$$(14)\quad [\mathrm{H}(x^2+y^2-a^2-b^2)-2p^2\mathrm{D}^2] = 16a^2b^2p^2\mathrm{HE};$$

c'est une courbe du huitième ordre.

3° *Quant au côté* AB, *nous voyons*, par l'équation (11), *qu'il s'ajoutera à la somme algébrique des tangentes ou s'en retranchera, suivant que les premiers membres des deux équations suivantes* :

$$(15)\qquad \mathrm{H}(x^2+y^2-a^2-b^2)-2p^2\mathrm{D}=0,$$

$$(16)\quad -a^2b^2\mathrm{H}^2-p^2\mathrm{H}[\mathrm{D}(x^2+y^2-a^2-b^2)-4a^2b^2\mathrm{E}]+p^4\mathrm{D}^2=0,$$

sont de mêmes signes ou de signes contraires.

La courbe (15) est du quatrième ordre, la courbe (16) est du sixième ordre.

7. Le problème posé est donc résolu, en ce sens que nous avons obtenu l'équation rationnelle du lieu ; mais il reste une partie intéressante que nous n'aborderons pas, c'est la discussion de cette équation et la construction de la courbe ; cette étude, très-longue, n'est pas d'ailleurs sans difficulté.

On peut cependant remarquer que des relations

$$(17)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mathrm{D},\quad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\mathrm{E}$$

on déduit

$$(18)\qquad x^2=\frac{a^4}{c^2}(\mathrm{D}-b^2\mathrm{E}),\quad y^2=\frac{b^4}{c^2}(-\mathrm{D}+a^2\mathrm{E}),$$

d'où

(18 *bis*) $$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)\mathrm{D} - a^2b^2\mathrm{E}.$$

Si, dans l'équation (12), on remplace (x^2+y^2) par sa valeur (18 *bis*), dans les termes où cette somme est en évidence, et qu'on pose

(19) $$\mathrm{HE} = u,$$

l'équation résultante sera du troisième degré en u : la difficulté de la discussion se trouve donc considérablement réduite.

Quant aux courbes de séparation (13), (14), (15), (16), leur construction peut parfaitement s'effectuer; seulement, pour les courbes (14) et (16), il faudra avoir recours au procédé que nous venons d'indiquer.

Nous ajouterons encore quelques remarques.

La courbe ((12)) est du douzième ordre.

La courbe ((12)) possède au moins vingt-quatre points doubles; il y en a vingt-quatre qui sont les intersections des courbes (15) et (16); parmi ces derniers points, il y en a douze qui coïncident, par groupes de six, avec les points à l'infini sur l'ellipse, etc., etc....

EXPRESSIONS DE $\sin ma$ ET $\cos ma$ EN FONCTION DE $\sin a$ OU $\cos a$ SEULEMENT;

PAR M. MOURGUE.

On se propose de déduire ces expressions des formules ordinaires

$$\sin ma = 2\cos a \sin(m-1)a - \sin(m-2)a,$$
$$\cos ma = 2\cos a \cos(m-1)a - \cos(m-2)a.$$

I.

Ces expressions sont une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque trois termes consécutifs de la suite indéfinie* A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n... *sont liés par la relation* $A_n = KA_{n-1} - A_{n-2}$, *où* K *désigne une quantité fixe, un terme quelconque a pour valeur*

$$A_n = \left[K^{m-1} - \frac{m-2}{1}K^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}K^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}K^{m-7}\ldots\right]A_1$$
$$- \left[K^{m-2} - \frac{m-3}{1}K^{m-4} + \frac{(m-4)(m-5)}{1.2}K^{m-6} - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3}K^{m-8}\ldots\right]A_0,$$

formule dans laquelle les premiers facteurs des numérateurs sont des entiers successifs décroissants.

En effet, les premières applications de la relation énoncée donnent

$$A_2 = KA_1 - A_0,$$
$$A_3 = (K^2 - 1)A_1 - KA_0,$$
$$A_4 = (K^3 - 2K)A_1 - (K^2 - 1)A_0.$$

Je dis que, en continuant les calculs indéfiniment :

1° Les seconds membres des égalités resteront des fonctions linéaires de A_1 et A_0;

2° Le coefficient de A_0 dans une égalité restera égal et de signe contraire à celui de A_1 dans l'égalité précédente;

3° Les coefficients P_{n-2}, P_{n-1}, P_n de A_1, dans trois éga-

lités consécutives, auront entre eux la même relation que les premiers membres, savoir :

$$P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}.$$

Pour le démontrer, admettons que deux égalités consécutives vérifient 1° et 2° :

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} A_{n-1} = P_{n-2} A_1 - P_{n-3} A_0, \\ A_n \quad = P_{n-1} A_1 - P_{n-2} A_0. \end{cases}$$

De la seconde on déduit

$$A_{n+1} = P_{n-1} A_2 - P_{n-2} A_1,$$

d'où, en remplaçant A_2 par sa valeur,

$$(6)\qquad \begin{cases} A_{n+1} = (P_{n-1} K - P_{n-2}) A_1 - P_{n-1} A_0 \\ \text{et, par suite,} \\ P_n = P_{n-1} K - P_{n-2}. \end{cases}$$

La comparaison des égalités (α) et (6) met en évidence 1°, 2° et 3°.

Remarque. — En vertu de 2°, pour avoir un terme quelconque de la suite A_2, A_3, A_4, A_5, ..., il suffira de trouver la loi des coefficients de A_1.

Loi de formation des coefficients de A_1. — La relation $P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}$ donne, pour les premiers coefficients de A_1, le tableau suivant :

$$(I)\qquad \begin{cases} P_0 = 1, \\ P_1 = K, \\ P_2 = K^2 - 1, \\ P_3 = K^3 - 2K, \\ P_4 = K^4 - 3K^2 + 1, \\ P_5 = K^5 - 4K^3 + 3K. \end{cases}$$

(On a mis en tête l'égalité conventionnelle $P_0 = 1$ pour faciliter les énoncés ultérieurs.)

Dans ce tableau indéfiniment prolongé :

1° Les seconds membres seront des fonctions alternées de puissances descendantes et de même parité de K;

2° En ce qui concerne les valeurs absolues, le coefficient d'une puissance de K s'obtient en ajoutant celui qui le surmonte d'un rang au voisin de gauche de celui qui le surmonte de deux rangs.

3° Cette règle se transforme en la suivante :

Un coefficient placé dans une colonne verticale (sauf la première), et appartenant à la $n^{\text{ième}}$ ligne horizontale, est égal à la somme des coefficients de la colonne précédente, arrêtée à la $(n-2)^{\text{ième}}$ ligne horizontale.

Pour le démontrer, admettons que deux égalités consécutives du tableau vérifient 1° :

$$P_{n-2} = K^{n-2} - a_{n-2}K^{n-4} + b_{n-2}K^{n-6} - c_{n-2}K^{n-8}\ldots,$$
$$P_{n-1} = K^{n-1} - a_{n-1}K^{n-3} + b_{n-1}K^{n-5} - c_{n-1}K^{n-7}\ldots.$$

D'après la relation $P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}$, on en déduit

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} P_n = K^n - (a_{n-1}+1)K^{n-2} + (b_{n-1}+a_{n-2})K^{n-4} \\ \qquad - (c_{n-1}+b_{n-2})K^{n-6}\ldots, \\ \text{et par suite} \\ a_n = a_{n-1}+1, \quad b_n = b_{n-1}+a_{n-2}, \quad c_n = c_{n-1}+b_{n-2},\ldots, \end{array}\right.$$

ce qui met en évidence 1° et 2°.

Enfin, des égalités

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2},\quad b_{n-1} = b_{n-2} + a_{n-3},\quad b_{n-2} = b_{n-3} + a_{n-4}\ldots,$$

on déduit, par addition,

$$b_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \ldots,$$

et de même

$$c_n = b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui établit 3°.

Cela posé, dans la $m^{ième}$ égalité du tableau (1), savoir :

$$P_{m-1} = K^{m-1} - a_{m-1}K^{m-3} + b_{m-1}K^{m-5} - c_{m-1}K^{m-7}\ldots,$$

on aura, d'après 3°,

$$a_{m-1} = 1+1+1+1+\ldots = \frac{m-2}{1},$$

$$b_{m-1} = \frac{m-4}{1} + \frac{m-5}{1} + \frac{m-6}{1} + \ldots = \frac{(m-3)(m-4)}{1.2},$$

$$c_{m-1} = \frac{(m-5)(m-6)}{1.2} + \frac{(m-6)(m-7)}{1.2} + \ldots$$

$$= \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et comme

$$A_m = P_{m-1}A_1 + P_{m-2}A_0,$$

on aura finalement

$$A_m = \left[K^{m-1} - \frac{m-2}{1}K^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}K^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}K^{m-7} + \ldots\right]A_1$$
$$- \left[K^{m-2} - \frac{m-3}{1}K^{m-4} + \frac{(m-4)(m-5)}{1.2}K^{m-6} - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3}K^{m-8} + \ldots\right]A_0.$$

II.

1° Puisque $\sin ma$, $\sin(m-1)a$, $\sin(m-2)a$ sont liés par la relation

$$\sin ma = K\sin(m-1)a - \sin(m-1)a, \quad \text{où} \quad K = 2\cos a,$$

en posant, dans l'égalité précédente,

$$A_m = \sin ma, \quad A_1 = \sin a, \quad A_0 = 0, \quad K = 2\cos a,$$

il vient

$$(S) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin ma}{\sin a} &= (2\cos a)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos a)^{m-3} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos a)^{m-5} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\cos a)^{m-7}\ldots, \end{aligned} \right.$$

formule que donne $\sin ma$ en fonction de $\cos a$ pour toute valeur entière de m.

En y remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, le premier membre devient

$$\left.\begin{aligned} +\frac{\sin ma}{\cos a}, \\ -\frac{\sin ma}{\cos a}, \end{aligned}\right\} \text{ pour } \quad m = \left\{ \begin{aligned} &4p+2, \\ &4p, \end{aligned}\right.$$

et

$$\left.\begin{aligned} +\frac{\cos ma}{\cos a}, \\ -\frac{\cos ma}{\cos a}, \end{aligned}\right\} \text{ pour } \quad m = \left\{ \begin{aligned} &4p+1, \\ &4p-1. \end{aligned}\right.$$

Donc on aura, pour m *pair*,

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\sqrt{-1})^{m+2}\frac{\sin ma}{\cos a} \\ &= (2\sin a)^{m-1} - \frac{m-1}{1}(2\sin a)^{m-3} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\sin a)^{m-5} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\sin a)^{m-7}\ldots, \end{aligned} \right.$$

et, pour *m impair*,

$$(\mathrm{C}_1)\left\{\begin{aligned}
&(\sqrt{-1})^{m-1}\frac{\cos ma}{\cos a}\\
&\quad=(2\sin a)^{m-1}-\frac{m-2}{1}(2\sin a)^{m-3}\\
&\quad\quad+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\sin a)^{m-5}\\
&\quad\quad-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\sin a)^{m-7}\ldots,
\end{aligned}\right.$$

2° Si, dans l'égalité qui donne A_m, on pose

$$A_m=\cos ma,\quad A_1=\cos a,\quad A_0=1,\quad K=2\cos a,$$

il vient, en doublant les deux membres,

$$\begin{aligned}
2\cos ma=(2\cos a)^m&-\frac{m-2}{1}(2\cos a)^{m-2}\\
&+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos a)^{m-4}\\
&-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\cos a)^{m-6}+\ldots\\
&-2(2\cos a)^{m-2}+2\,\frac{m-3}{2}(2\cos a)^{m-4}\\
&-2\,\frac{(m-4)(m-5)}{1.2}(2\cos a)^{m-6}+\ldots.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&\frac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p)}{1.2\ldots p}\\
&\quad+2\,\frac{(m-p-1)\ldots(m-2p+1)}{1\ldots(p-1)}\\
&\quad=\frac{m(m-p-1)\ldots(m-2p+1)}{1.2\ldots p};
\end{aligned}$$

donc

$$2\cos ma = (2\cos a)^m - \frac{m}{1}(2\cos a)^{m-2} + \frac{m}{1}\,\frac{m-3}{2}(2\cos a)^{m-4}$$
$$- \frac{m}{1}\,\frac{(m-4)(m-5)}{2.3}(2\cos a)^{m-6}$$
$$+ \frac{m}{1}\,\frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}(2\cos a)^{m-8} + \ldots .$$

En divisant les deux membres par $2\cos a$, on obtient

$$(\mathrm{C})\left\{\begin{aligned} \frac{\cos ma}{\cos a} = {} & (2\cos a)^{m-1} - \frac{m}{1}(2\cos a)^{m-3} \\ & + \frac{m}{1}\,\frac{m-3}{2}(2\cos a)^{m-5} \\ & - \frac{m}{1}\,\frac{(m-4)(m-5)}{2.3}(2\cos a)^{m-7} \\ & + \frac{m}{1}\,\frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}(2\cos a)^{m-9} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

formule qui donne $\cos ma$ en fonction de $\cos a$ pour m entier pair ou impair. En y remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, le premier membre devient

$$\left.\begin{aligned} & -\frac{\sin ma}{\sin a}, \\ & +\frac{\sin ma}{\sin a}, \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad m = \left\{\begin{aligned} & 4p - 1, \\ & 4p + 1, \end{aligned}\right.$$

et

$$\left.\begin{aligned} & +\frac{\cos ma}{\sin a}, \\ & -\frac{\cos ma}{\sin a}, \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad m = \left\{\begin{aligned} & 4p, \\ & 4p + 2; \end{aligned}\right.$$

donc, pour m *impair*,

$$(\mathrm{S}_1)\left\{\begin{aligned} (\sqrt{-1})^{m-1}\frac{\sin ma}{\sin a} = {} & (2\sin a)^{m-1} - \frac{m}{1}(2\sin a)^{m-3} \\ & + \frac{m}{1}\,\frac{m-3}{2}(2\sin a)^{m-5} \\ & - \frac{m}{1}\,\frac{(m-4)(m-5)}{1.2}(2\sin a)^{m-7} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et, pour *m pair,*

$$
(\mathrm{C}_2)\left\{
\begin{aligned}
(\sqrt{-1})^m \frac{\cos ma}{\sin a} &= (2\sin a)^{m-1} - \frac{m}{1}(2\sin a)^{m-3} \\
&\quad + \frac{m}{1}\,\frac{m-3}{2}(2\sin a)^{m-5} \\
&\quad - \frac{m}{1}\,\frac{(m-4)(m-3)}{1.2}(2\sin a)^{m-7} + \dots
\end{aligned}
\right.
$$

III.

Le même théorème donne la valeur de $x^m - \frac{1}{x^m}$ et de $x^m + \frac{1}{x^m}$, en fonction de $x + \frac{1}{x}$.

Puisque

$$
x^m - \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{m-1} - \frac{1}{x^{m-1}}\right) - \left(x^{m-2} - \frac{1}{x^{m-2}}\right),
$$

en posant

$$
\mathrm{A}_m = x^m - \frac{1}{x^m}, \quad \mathrm{A}_1 = x - \frac{1}{x}, \quad \mathrm{A}_0 = x^0 - \frac{1}{x^0} = 0
$$

et

$$
\mathrm{K} = x + \frac{1}{x},
$$

on aura,

$$
\begin{aligned}
\frac{x^m - \frac{1}{x^m}}{x - \frac{1}{x}} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-1} - \frac{m-2}{1}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-3} \\
&\quad + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-5} - \dots
\end{aligned}
$$

De même, ayant

$$
x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) - \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right),
$$

en posant

$$A_m = x^m + \frac{1}{x^m}, \quad A_1 = x + \frac{1}{x}, \quad A_0 = x^0 + \frac{1}{x_0} = 2$$

et

$$K = x + \frac{1}{x},$$

on aura

$$x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^m - \frac{m}{1}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-2}$$
$$+ \frac{m}{1}\,\frac{m-3}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-4}$$
$$- \frac{m}{1}\,\frac{(m-3)(m-5)}{1.2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-6} + \ldots.$$

Nota. — Dans la formule qui donne $2\cos ma$, on a divisé les deux membres par $2\cos a$, pour donner la même physionomie à toutes les formules. Comme le second membre n'est divisible par $2\cos a$ que dans le cas de m impair, il en résulte que, dans le cas de m pair, le dernier terme de la formule suivante contiendra $2\cos a$, avec l'exposant -1.

Par exemple,

$$\frac{\cos 8a}{\cos a} = (2\cos a)^7 - \frac{8}{1}(2\cos a)^5 + \frac{8}{1}\,\frac{5}{3}(2\cos a)^3$$
$$- \frac{8}{1}\,\frac{4.3}{2.3}(2\cos a)^1 + \frac{8}{1}\,\frac{3.2.1}{2.3.4}(2\cos a)^{-1},$$

d'où

$$\cos 8a = 128\cos^8 a - 256\cos^6 a + 160\cos^4 a - 32\cos^2 a + 1.$$

———

EXPRESSION DE LA DIFFÉRENCE D'ORDRE $n^{ième}$ D'UNE FONCTION,

au moyen de la dérivée du même ordre de cette fonction;

PAR M. A. PICART.

Soit $y=f(x)$: on donne successivement à la variable les valeurs x, $x+h$, $x+2h,\ldots$, $x+nh$; la fonction prend les valeurs correspondantes $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h),\ldots,f(x+nh)$; sa différence $n^{ième}$ est alors

$$\Delta^n y = f(x+nh) - nf(x+\overline{n-1}\,h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}\,h) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}f(x+\overline{n-3}\,h) + \ldots + (-1)^p\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}f(x+\overline{n-p}\,h)+\ldots$$

Il s'agit d'exprimer cette différence au moyen de la dérivée $n^{ième}$ de la fonction $f(x)$. Posons

$$\frac{f(x+nh) - nf(x+\overline{n-1}\,h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}\,h) - \ldots}{h^n} = \mathrm{A},$$

ou

$$f(x+nh) - nf(x+\overline{n-1}\,h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}\,h) - \ldots + (-1)^n f^n(x) - \mathrm{A}h^n = 0,$$

ou, en remplaçant h par $\frac{\mathrm{X}-x}{n}$,

$$(1)\quad \left\{ f(\mathrm{X}) - nf\left(\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}-x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}f\left[\mathrm{X}-\frac{2(\mathrm{X}-x)}{n}\right] - \ldots + (-1)^n f(x) - \mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}-x}{n}\right)^n = 0. \right.$$

et considérons la fonction

$$\varphi(z)=f(\mathrm{X})-nf\left(\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}f\left(\mathrm{X}-2\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right]-\ldots$$
$$+(-1)^n f(z)-\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)^n.$$

Elle s'annule pour $z=x$, en vertu de (1), et pour $z=\mathrm{X}$; car elle devient, pour cette valeur de z,

$$f(\mathrm{X})\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots\right),$$

et la quantité entre parenthèses est égale à zéro; donc sa dérivée s'annule pour une valeur z_1 de z intermédiaire entre x et X (on suppose la fonction $f(x)$ finie et continue dans l'intervalle de x à X). Or

$$\varphi'(z)=-f'\left(\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)+(n-1)f'\left(\mathrm{X}-2\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f'\left(\mathrm{X}-3\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)+\ldots$$
$$+\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)^{n-1}.$$

Cette fonction $\varphi'(z)$ s'annule aussi pour $z=\mathrm{X}$; donc la dérivée $\varphi''(z)$ doit s'annuler pour une valeur z_2 de z comprise entre z_1 et X (pourvu que $f'(x)$ soit continue dans l'intervalle de x à X). Or

$$\varphi''(z)=-\frac{1}{n}f''\left(\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)+(n-1)f''\left(\mathrm{X}-2\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)\frac{2}{n}$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f''\left(\mathrm{X}-3\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)\frac{3}{n}+\ldots$$
$$-\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)^{n-2}\frac{n-1}{n},$$

ou

$$n\varphi''(z) = -f''\left(X - \frac{X-z}{n}\right) + (n-1)f''\left(X - 2\frac{X-z}{n}\right)2$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f''\left(X - \frac{X-z}{n}\right)3 + \ldots$$
$$-(n-1)A\left(\frac{X-z}{n}\right)^{n-2}.$$

Cette dérivée seconde s'annule aussi pour $z = X$; car elle devient, pour cette valeur de z,

$$\frac{-f''(X)}{n}\left[1 - \frac{n-1}{1}2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}3 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}4 + \ldots\right],$$

et l'on sait que l'expression

$$1 - (n-1)2^p + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}3^p$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \ldots + (-1)^n n^p$$

est nulle pour toutes les valeurs entières et positives de p inférieures à $n-1$, et égale à $1.2\ldots(n-1)(-1)^{n-1}$, pour $p = n-1$; donc la dérivée tierce s'annule pour une valeur z_3 de z comprise entre z_2 et X [pourvu que $f''(x)$ soit continue de x à X].

Or

$$n^2\varphi'''(z) = -f'''\left(X - \frac{X-z}{n}\right) + (n-1)f'''\left(X - 2\frac{X-z}{n}\right)2^2$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f'''\left(X - 3\frac{X-z}{n}\right)3^2 + \ldots$$
$$+(n-1)(n-2)A\left(\frac{X-z}{n}\right)^{n-3}.$$

Cette dérivée s'annule aussi pour $z = X$; donc la dérivée quatrième s'annulera pour une valeur z_4 de z comprise entre z_3 et X. En continuant ainsi, on verra que la dérivée $n^{ième}$ de la fonction $\varphi(z)$ doit s'annuler pour

une valeur z_n de z comprise entre x et X. Or on a

$$n^{n-1}\varphi^{(n)}z = -f^{(n)}\left(X - \frac{X-z}{n}\right) + (n-1)f^{(n)}\left(X - 2\frac{X-z}{n}\right)2^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^{(n)}\left(X - 3\frac{X-z}{n}\right)3^{n-1} + \ldots$$
$$- (-1)^n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\,A,$$

donc

$$A = (-1)^{n-1}\frac{f^n\left(X - \frac{X-z_n}{n}\right) - (n-1)f^{(n)}\left(X - 2\frac{X-z_n}{n}\right)2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^{(n)}\left(X - 3\frac{X-z_n}{n}\right)3^{n-1} - \ldots}{1.2\ldots(n-1)},$$

ou, en mettant, à la place de z_n, $x + \theta nh$ $(0 < \theta < 1)$, et à la place de X, $x + nh$,

$$A = (-1)^{n-1}\frac{f^{(n)}[x+(n-1)h+\theta h] - (n-1)f^n(x+\overline{n-2}h+2\theta h)2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^{(n)}(x+\overline{n-3}h+3\theta h)3^{n-1} - \ldots}{1.2\ldots(n-1)},$$

et l'on a ainsi la formule remarquable

$$(1)\left\{\begin{aligned}&f(x+nh) - nf(x+\overline{n-1}h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}h) - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}f(x+\overline{n-3}h) + \ldots\\ &= h^n(-1)^{n-1}\frac{f^{(n)}(x+\overline{n-1}h+\theta h) - (n-1)f^n(x+\overline{n-2}h+2\theta h)2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^n(x+\overline{n-3}h+3\theta h)3^{n-1} - \ldots}{1.2.3\ldots(n-1)},\end{aligned}\right.$$

θ étant un nombre positif plus petit que 1.

On en déduit, lorsqu'on fait tendre h vers o,

$$\lim \frac{f(x+nh) - nf(x+\overline{n-1}h) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x+\overline{n-2}h) - \dots}{h^n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{f^{(n)}(x)\left[1-(n-1)2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}3^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}4^{n-1} + \dots\right]}{1.2\dots(n-1)}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{f^{(n)}(x).1.2.3\dots(n-1)(-1)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}$$

$$= f^{(n)}(x),$$

ou

$$\lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x). \tag{2}$$

La formule (1) n'a été établie que dans l'hypothèse où la fonction $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées sont continues, et la $n^{ième}$ déterminée, dans l'intervalle de x à X; par suite, la formule (2) implique que la fonction $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées soient continues pour la valeur de x que l'on considère, et que la $n^{ième}$ dérivée soit déterminée.

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES RATIONNELLES;

PAR M. E. CATALAN.

Tous les Traités de Calcul intégral contiennent la for mule de *réduction*

$$\text{(A)} \qquad Z_p = \frac{2p-3}{2p-2} Z_{p-1} + \frac{z}{(2p-2)(1+z^2)^{p-1}},$$

dans laquelle

$$Z_p = \int \frac{dz}{(1+z^2)^p} \ (*).$$

A cause de $Z_0 = \operatorname{arctang} z$, cette formule fait connaître successivement $z_1, z_2, \ldots$. Mais il y a plus : on en peut conclure, par un calcul très-simple, la valeur générale de Z_p (**).

En effet, il est visible que

$$\text{(B)} \qquad Z_p = a \operatorname{arctang} z + \sum_1^{p-1} a_i \frac{z}{(1+z^2)^i},$$

$a, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ étant des coefficients inconnus. Prenant les dérivées, on a donc

$$\text{(C)} \qquad \frac{1}{(1+z^2)^p} = a \frac{1}{1+z^2} + \sum_1^{p-1} a_i \left[\frac{z}{(1+z^2)^i}\right]'.$$

On tire de l'égalité (A)

$$\left[\frac{z}{(1+z^2)^i}\right]' = 2i \frac{1}{(1+z^2)^{i+1}} - (2i-1) \frac{1}{(1+z^2)^i},$$

(*) *Voir*, par exemple, le *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*.
(**) Abstraction faite, bien entendu, de la constante arbitraire.

de sorte que (C) devient

$$\frac{1}{(1+z^2)^p} = a\frac{1}{1+z^2} + \sum_1^{p-1} 2i a_i \frac{1}{(1+z^2)^{i+1}} - \sum_1^{p-1}(2i-1)a_i \frac{1}{(1+z^2)^i},$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z^2)^p} = (a - a_1)\frac{1}{1+z^2} &+ (2a_1 - 3a_2)\frac{1}{(1+z^2)^2} \\ &+ (4a_2 - 5a_3)\frac{1}{(1+z^2)^3} + \ldots \\ &+ [(2p-4)a_{p-2} - (2p-3)a_{p-1}]\frac{1}{(1-z^2)^{p-1}} \\ &+ (2p-2)a_{p-1}\frac{1}{(1+z^2)^p}.\end{aligned}$$

Identifiant les deux membres, on trouve

$$\text{(D)}\quad \left\{\begin{aligned} a_{p-1} &= \frac{1}{2p-2}, \\ a_{p-2} &= \frac{2p-3}{(2p-2)(2p-4)}, \\ a_{p-3} &= \frac{(2p-3)(2p-5)}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 = a &= \frac{3.5\ldots(2p-3)}{2.4.6\ldots(2p-2)}. \end{aligned}\right.$$

Soit, comme application, $p = 5$. D'après les formules (B) et (D),

$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{(1+z^2)^5} = \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{arc\,tang} z &+ \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\frac{z}{1+z^2} \\ &+ \frac{5.7}{4.6.8}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{7}{6.8}\frac{z}{(1+z^2)^3} \\ &+ \frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4} + \text{const.}\end{aligned}$$

SUR LES DÉVELOPPEMENTS DE $\sin na$, $\cos na$, SUIVANT LES PUISSANCES DE $2\cos a$ ET $2\sin a$;

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

I. Les identités

$$\sin (n+1)a = \sin na\, 2\cos a - \sin(n-1)a,$$
$$\cos (n-1)a = \cos na\, 2\cos a - \cos(n-1)a$$

montrent que, pour les arcs 0, a, $2a$, $3a,\ldots$, na, les sinus et cosinus forment des séries récurrentes, dont l'échelle de relation est $2\cos a - 1$; on peut donc, au moyen des deux premiers termes, calculer un terme quelconque. Voici, pour les sinus et cosinus, le calcul des premiers termes :

$2\sin 0 = 0$,	$2\cos 0 = 2$,
$2\sin a = y$,	$2\cos a = x$,
$2\sin 2a = yx$,	$2\cos 2a = x^2 - 2$,
$2\sin 3a = y(x^2 - 1)$,	$2\cos 3a = x^3 - 3x$,
$2\sin 4a = y(x^3 - 2x)$,	$2\cos 4a = x^4 - 4x^2 + 2$,
$2\sin 5a = y(x^4 - 3x^2 + 1)$,	$2\cos 5a = x^5 - 5x^3 + 5x$,
$2\sin 6a = y(x^5 - 4x^3 + 3x)$,	$2\cos 6a = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$,
$2\sin 7a = y(x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1)$,	.......................,
$2\sin 8a = y(x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x)$,	
$2\sin 9a = y(x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x + 1)$,	
....	

Pour simplifier, on a posé $2\cos a = x$ et, par analogie, $2\sin a = y$. C'est pour éviter les fractions que l'on a doublé les sinus et les cosinus. En calculant jusqu'à dix termes pour les sinus, on a mis en évidence la loi des signes, celle des exposants et celle des coefficients,

qui sont des nombres figurés, etc., de sorte qu'en ayant égard au nombre de termes de chaque colonne, à partir de $2\sin a$, on voit de suite que l'on doit avoir

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\sin na = y\Big[& x^{n-1} - (n-2)x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5} \\ & - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}x^{n-7} + \ldots\Big]. \end{aligned} \right.$$

Dans les nombres figurés, on a renversé l'ordre des facteurs du numérateur, pour retrouver des formules données dans le n° 337 des *Recherches arithmétiques* de Gauss. On pourrait calculer de même $2\cos na$; mais il est plus court d'employer la formule

$$2\cos na = \frac{\sin(n+1)a}{y} - \frac{\sin(n-1)a}{y};$$

on trouve ainsi

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\cos na = {} & x^n - n x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4} \\ & - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Comme on a $x^2 + y^2 = 4$, on pourrait changer la forme de ces formules; mais, comme a est quelconque, il est plus simple de changer a en $\frac{\pi}{2} - a$, en ayant égard au changement de $\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, et, pour cela, il faut considérer le cas de n impair, $n = 2m+1$, et celui de n pair, $n = 2m$.

Le changement de a en $\frac{\pi}{2} - a$ change x en y et réciproquement : pour n impair, $\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ devient, en

posant $n = 2m + 1$,

$$\sin\left(ma + \frac{\pi}{2} - na\right),$$

savoir, $\cos na$ pour m pair et $-\cos na$ pour m impair; pour $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, on trouve

$$+\sin na \quad \text{et} \quad -\sin na;$$

pour $n = 2m$,

$$\sin 2m\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(m\pi - na),$$

$$\cos 2m\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(m\pi - na).$$

Il y a donc, pour m pair, changement de signe du sinus, le cosinus restant le même; c'est le contraire pour m impair. On a donc ces quatre équations : 1° pour n impair

$$(3)\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2\cos na\\ &= x\left[y^{n-1} - (n-2)y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}y^{n-5} - ..\right],\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2\sin na = y^n - ny^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}y^{n-4} - \ldots,$$

2° pour n pair

$$(5)\quad \pm 2\sin na = x[y^{n-1} - (n-2)y^{n-3} + \ldots],$$

$$(6)\quad \mp 2\cos na = y^n - ny^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}y^{n-4} + \ldots,$$

selon que $\frac{n}{2}$ est pair ou impair (*).

(*) Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) ne sont qu'une simplification des formules de Cauchy; seulement, au lieu d'ordonner suivant les puissances de $\sin a$ et $\cos a$, j'ai ordonné suivant les puissances de $2a$ et $\cos a$. (*Voir* l'*Analyse algébrique* de Cauchy, ou la *Trigonométrie* de M. Serret.)

II. Passons aux équations de degré m qui, pour $n = 2m + 1$, donnent les sinus et les cosinus des arcs o, $\frac{2\pi}{n} = a, 2a, 3a, \ldots, (n-1)a$.

Ayant inscrit, dans un cercle de rayon 1, un polygone régulier de n côtés $A_0 A_1 A_2 \ldots A_m A_{m+1} \ldots A_{2m}$, on joindra le sommet A_0 avec le centre; on aura un axe de symétrie perpendiculaire au côté $A_m A_{m+1}$ du polygone. Si, par le centre, on mène une perpendiculaire à l'axe de symétrie, on voit de suite que les sommets symétriquement placés par rapport à cet axe auront le même cosinus et des sinus égaux et de signe contraire : pour A_0, le sinus sera o et le cosinus 1.

Pour avoir les doubles sinus y, ou les diagonales du polygone, aussi bien que le côté, on fera, dans l'équation (4), $\sin na = 2k\pi$, on divisera par y, et l'on prendra pour inconnue y^2; l'équation divisée par 2^n est précisément l'équation (I) du n° 337 des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss.

L'équation (2), où l'on ferait $na = 2k\pi$, étant divisée par 2^n, donnerait l'équation (II) du n° 337 déjà cité; mais, comme l'équation (2) revient à $(x-2)P^2 = 0$, voici comment on trouvera l'équation $P = 0$.

On remarquera que

$$\sin(p-q)\sin(p+q) = \sin^2 p - \sin^2 q,$$

de sorte que, posant $p = (m+1)a$, $q = ma$, on aura

$$(a) \left\{ \begin{aligned} &\sin a \sin(2m+1)a \\ &\quad = [\sin(m+1)a + \sin ma][\sin(m+1)a - \sin ma]; \end{aligned} \right.$$

en posant $(2m+1)a = 2k\pi$, c'est donc

$$\sin(m+1)a + \sin ma = 0,$$

que l'on doit avoir. Les deux équations qui viennent

d'être indiquées sont donc, pour le cas de $n = 2m + 1$,

$$(7) \qquad z^m - nz^{m-1} + \frac{n(n-3)}{1.2} z^{m-2} + \ldots \pm n = 0,$$

où z est le carré du côté et des diagonales,

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & x^m - (m-1)x^{m-2} + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} x^{m-4} + \ldots \\ & + x^{m-1} - (m-2)x^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} x^{m-5} + \ldots = 0; \end{aligned} \right.$$

c'est l'équation $P = 0$, transformée au moyen de l'équation (1) et du théorème (a).

Il est à remarquer que, les racines de (8) étant $2\cos a$, $2\cos 2a, \ldots, 2\cos ma$, on aura

$$(b) \qquad 1 + 2\cos a + 2\cos 2a + \ldots + 2\cos ma = 0,$$

ce qui se démontre encore en projetant orthogonalement le périmètre du polygone régulier de $2m + 1$ côtés sur un côté prolongé dans les deux sens; cela vient de ce que a est l'angle au centre du polygone, ou le supplément de l'angle à la circonférence.

III. Si l'on considérait l'identité

$$r^{k+1} + \frac{1}{r^{k+1}} = \left(r^k + \frac{1}{r^k}\right)\left(r + \frac{1}{r}\right) - \left(r^{k-1} + \frac{1}{r^{k-1}}\right),$$

on aurait une série récurrente dont l'échelle de relation serait $r + \frac{1}{r}$, -1. Si l'on posait $r + \frac{1}{r} = x$, comme on a $r^0 + \frac{1}{r^0} = 2$, on trouverait, comme pour la série des cosinus $0, a, 2a, \ldots$,

$$r^n + \frac{1}{r^n} = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} x^{n-4} - \ldots.$$

Pour identifier cette équation avec l'équation (2), il faudrait poser

$$r + \frac{1}{r} = 2\cos a,$$

ou

$$r^2 - 2r\cos a + 1 = 0,$$

$$r = \cos a + \sin a\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{r} = \cos a - \sin a\sqrt{-1},$$

on aurait

$$r^k + \frac{1}{r^k} = 2\cos ka,$$

et l'équation (b) donnerait

$$1 + r + \frac{1}{r} + r^2 + \frac{1}{r^2} + \ldots + r^m + \frac{1}{r^m} = 0,$$

ou

$$r^{2m} + r^{2m-1} + \ldots + r + 1 = \frac{r^{2m+1} - 1}{r - 1} = 0,$$

ou encore

$$(r^2 - 2r\cos a + 1)(r^2 - 2r\cos 2a + 1)\ldots(r^2 - 2r\cos ma - 1) = 0.$$

Comme des équations

$$r = \cos a + \sin a\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{r} = \cos a - \sin a\sqrt{-1}$$

on tire

$$2\cos a = \frac{r^2 + 1}{r},$$

$$2\sin a = \frac{1 - r^2}{r}\sqrt{-1}, \quad \operatorname{tang} a = \frac{1 - r^2}{1 + r^2}\sqrt{-1},$$

on peut, comme le fait Gauss, ramener la détermination de $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tang} a$, à la résolution de $r^n - 1 = 0$.

Dans le n° 337, dont j'ai voulu faire ici un petit commentaire, on trouve l'équation de degré impair dont les racines sont les tangentes des arcs $k\frac{2\pi}{n}$:

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4} - \ldots \pm nx = 0;$$

elle se tire de la formule générale

$$\operatorname{tang} na = \frac{nx - \frac{n(n-1)(n-3)}{1.2.3}x^3 + \ldots}{1 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots} \quad (x = \operatorname{tang} a),$$

où l'on retrouve les coefficients binomiaux. Cette formule se démontre par la méthode dite *de proche en proche,* en partant de l'équation

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} 3a = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \ldots$$

Remarque. — Pour $p = 17$, l'équation (8) est

$$x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 = 0;$$

les racines sont, en posant $\frac{2\pi}{17} = \omega$, les suivantes : $2\cos\omega$, $2\cos 2\omega, \ldots,$ $2\cos 8\omega$. Gauss a donné la première dans le n° 365 des *Disquisitiones;* j'ai donné les autres (avec deux erreurs de signe) dans le tome V de la première série des *Nouvelles Annales*. Je profite de l'occasion pour les rectifier.

Dans les équations suivantes :

$$A = 34 - 2\sqrt{17}, \quad B = 34 + 2\sqrt{17}, \quad AB = 64.17,$$

le signe + du radical principal (qui est multiplié par 2) appartient au premier cosinus placé dans le premier membre, le signe — appartient au second cosinus :

$$16\cos\omega, \quad 16\cos 4\omega$$
$$= -1 + \sqrt{17} + \sqrt{A} \pm 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - (\sqrt{A} + 2\sqrt{B})},$$
$$16\cos 2\omega, \quad 16\cos 8\omega$$
$$= -1 + \sqrt{17} + \sqrt{A} \pm 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + (\sqrt{A} + 2\sqrt{B})},$$
$$16\cos 3\omega, \quad 16\cos 5\omega$$
$$= -1 - \sqrt{17} + \sqrt{B} \pm 2\sqrt{17 - 3\sqrt{17} - (\sqrt{B} - 2\sqrt{A})},$$
$$16\cos 6\omega, \quad 16\cos 7\omega$$
$$= -1 - \sqrt{17} - \sqrt{B} \pm 2\sqrt{17 - 3\sqrt{17} + (\sqrt{B} - 2\sqrt{A})}.$$

On en tirera facilement le carré du côté et des diagonales du polygone régulier de 17 côtés.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1873).

Composition mathématique. — On donne un cercle et un point A, et l'on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par le point donné A et à toucher en deux points le cercle donné.

On discutera la courbe obtenue pour les différentes positions du point A, et l'on démontrera que, dans le cas général, les points de contact des tangentes qu'on peut mener au lieu par le point A sont situés sur une circonférence de cercle.

Calcul trigonométrique. — Étant donnés, dans un triangle rectiligne ABC, deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$b = 5824^{m},704, \quad c = 4754^{m},376, \quad A = 75^{\circ}25'25'',$$

calculer les angles B, C, le côté a et la surface.

Composition de Géométrie descriptive. — On donne un cylindre à bases parallèles; la base inférieure est un cercle situé dans le plan horizontal de projection; son centre est à 5 centimètres en avant de la ligne de terre et son rayon de 4 centimètres. Ses génératrices sont parallèles au plan vertical et inclinées à 45 degrés sur le plan horizontal, et sa base supérieure est à une hauteur de 14 centimètres au-dessus du plan horizontal.

Une sphère, ayant pour rayon 7 centimètres et pour centre le point milieu (I, I') de l'arête (AB, A'B') du cylindre parallèle au plan vertical et la plus rapprochée de ce plan, coupe le cylindre.

On demande de représenter le corps qui subsiste quand on détache du cylindre le volume commun à ce cylindre et à la sphère.

On donnera la construction d'un point et de la tangente en ce point, en expliquant, s'il y a lieu, les constructions employées, à côté de l'épure.

AOUST (l'Abbé), professeur d'Analyse infinitésimale à la Faculté des Sciences de Marseille. — **Analyse infinitésimale des courbes planes**, contenant la résolution d'un grand nombre de problèmes choisis, à l'usage des candidats à la licence ès sciences. In-8, avec 80 figures dans le texte; 1873.. 8 fr. 50 c.

L'élément nouveau que l'Auteur a introduit dans son *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, sous le nom de *courbure inclinée*, lui a rendu des services non moins importants dans l'*Analyse infinitésimale des courbes planes*. L'usage des coordonnées naturelles favorise en effet le Calcul et la Géométrie, soit en abrégeant la route, soit en découvrant des horizons nouveaux; il est même indispensable dans certaines questions qui, sans cela, seraient inabordables. L'Ouvrage est divisé en trois Livres : le premier consacré aux coordonnées simples, le deuxième aux coordonnées complexes, le troisième aux coordonnées d'un ordre quelconque. Dans tout le cours de son travail, l'auteur a insisté sur la résolution des problèmes, et a mis en contraste la méthode nouvelle avec celle que l'on suit ordinairement. D'ailleurs ces questions, liées entre elles et échelonnées, forment, quant à la matière et quant à l'ordre, un corps de doctrines géométriques et un recueil homogène d'exercices utiles à ceux qui veulent pénétrer dans la connaissance du Calcul infinitésimal.

BERTRAND (**L.**), Professeur agrégé à la Faculté des Sciences et Lettres de Genève. — **Géométrie de position ou Géométrie supérieure** (1re Partie). In-8, avec figures dans le texte; 1873........................ 6 fr.

BREGUET. — **Baromètres anéroïdes.** Instruction sur l'emploi de ces baromètres, suivie de 2 Tables de M. Radau, donnant les corrections pour les diverses hauteurs et les corrections relatives à la latitude, terminée par une Table donnant les hauteurs de plusieurs points du globe. In-18; 1872.................................. 1 fr. 50 c.

CONNAISSANCE DES TEMPS ou **DES MOUVEMENTS CÉLESTES**, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, **POUR L'AN 1874**, publiée par le **BUREAU DES LONGITUDES**. Grand in-8; 1872.

Sans Additions.................................. 3 fr. 50 c.
Avec Additions.................................. 6 fr. 50 c.

Pour recevoir l'Ouvrage franco *par la poste en France, ajouter* 75 *cent*.

Les Additions contiennent : Sur la Table des positions géographiques. Additions et corrections qui ont été faites cette année à la Table géographique des principaux lieux, par M. de la Roche-Poncié. — Rapport sur la longitude de Shang-Haï, déduite des observations méridiennes de la Lune faites par M. G. Fleuriais, lieutenant de vaisseau. — Rapport sur la longitude de Pondichéry, déduite des observations méridiennes de la Lune faites par M. G. Fleuriais, lieutenant de vaisseau.

D'ABBADIE (**A.**), Membre de l'Institut. — **Géodésie d'Éthiopie**, ou Triangulation d'une partie de la haute Ethiopie, exécutée selon des méthodes nouvelles par A. d'Abbadie; vérifiée et rédigée par *R. Radau*. Grand in-4°, de XXXII-504 pages, avec 11 cartes et 10 planches; 1873....... 30 fr.

DU MONCEL (**Th.**), Ingénieur électricien de l'Administration des Lignes télégraphiques. — **Exposé des Applications de l'Électricité**. *Technologie électrique*. 3e édition, entièrement refondue. Cette édition formera 5 volumes grand in-8, avec de nombreuses figures dans le texte.

En vente les tomes I et II : *Technologie électrique*.

TOME I, 516 pages, 1 planche et 99 figures; 1872.... 12 fr. 50 c.
TOME II, 560 pages, 1 tableau, 2 planches et 192 fig.; 1873.................................. 12 fr. 50 c.

TABLE DES MATIÈRES.

Septembre 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

nov. '17

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

OCTOBRE 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103, ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BERTRAND (J.), Membre de l'Institut. — **La Théorie de la Lune d'Aboul-Wefâ.** In-4; 1873.. 1 fr. 50 c.

Les astronomes arabes ont été presque exclusivement les disciples des Grecs, et leurs observations n'ont rien ajouté d'essentiel aux théories de Ptolémée. Telle était l'opinion commune des historiens avant la découverte du fragment d'Aboul-Wefâ, signalé et traduit en 1834 par M. Sédillot. Faut-il admettre avec le savant orientaliste que l'astronome arabe avait dès le xe siècle découvert une inégalité de la Lune signalée depuis par Tycho-Brahé, dont elle a été souvent citée comme la découverte capitale? Telle est la question, plusieurs fois discutée par les astronomes, et dont les arguments sont reproduits et résumés dans cet opuscule. — M. Bertrand, entièrement d'accord avec M. Biot, pense qu'il n'y a rien à changer aux idées admises et que la découverte est illusoire.

BRETON (**de Champ**), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — **Traité du Nivellement,** contenant la théorie et la pratique du nivellement ordinaire et les nivellements expéditifs dits préparatoires ou de reconnaissance. 3e édition, revue, corrigée et augmentée. In-8, avec planches; 1873.. 6 fr.

Ce traité est divisé en cinq Livres : le premier contient la théorie du nivellement proprement dit. Il forme comme une introduction à la pratique de cet art.

Le deuxième Livre est consacré à la description des instruments. Les procédés à employer pour la vérification et la rectification des niveaux, surtout de ceux qui sont actuellement en usage, s'y trouvent exposés avec tous les détails nécessaires. On s'est attaché à ne pas fatiguer, par une trop grande abondance de développements mathématiques, l'attention des personnes qui ne demandent qu'à passer immédiatement aux explications.

La pratique forme l'objet du troisième Livre. C'est là que l'on peut se faire une première idée des précautions minutieuses et cependant indispensables auxquelles il faut recourir pour bien niveler; et cette première idée ne sera elle-même qu'une préparation aux premiers exercices auxquels on devra se livrer sur le terrain.

Les méthodes imaginées par feu M. Bourdaloue, dont le nom est justement célèbre dans la spécialité des nivellements, tiennent une grande place dans ce Livre et dans le précédent. On sait qu'elles ont servi à l'établissement du réseau primordial des lignes de base du nivellement général de la France, entrepris en 1857 par l'administration des Ponts et Chaussées, et que le succès a dépassé de bien loin tout ce qu'on avait obtenu par les procédés de la Géodésie astronomique.

Sous le titre d'*Applications*, le quatrième Livre présente une exposition des principaux usages du nivellement destiné à mettre le lecteur en état de saisir le but de chaque opération et de satisfaire le mieux possible aux conditions que le travail à exécuter doit remplir.

Dans le cinquième et dernier Livre, l'Auteur fait connaître le parti que l'on peut tirer des clisimètres ou niveaux de pente, ainsi que des nivellements trigonométriques et barométriques, notamment lorsqu'il s'agit d'opérations préparatoires ou de reconnaissance.

A la suite de ce Traité sont placées quelques Notes sur divers sujets qui ont paru pouvoir présenter de l'intérêt. L'une d'elles est relative au nivellement général de la France et en particulier à l'établissement des lignes de base, auxquelles on peut désormais rattacher, sans crainte d'erreur, les nivellements de détail qui conduiront à la connaissance exacte du relief de notre sol.

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE GÉNÉRALE,

COMPRENANT

LES LEÇONS PROFESSÉES A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'INSTITUT, INGÉNIEUR DES MINES, ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE POUR LES ÉTUDES SCIENTIFIQUES.

TOME I : *Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement des corps solides.* In-8, avec figures dans le texte; 1873.................................... 9 fr. 50 c.

TOME II : *Frottement. — Équilibre intérieur des corps. — Théorie mathématique de la poussée des terres. — Équilibre et mouvements vibratoires des corps isotropes. — Hydrostatique. — Hydrodynamique. — Hydraulique. — Thermodynamique, suivie de la théorie des armes à feu.* In-8 (sous presse).

TOME III : *Théorie des machines proprement dites, des récepteurs hydrauliques et des machines à vapeur.* In-8 (sous presse).

En envoyant à l'Éditeur un mandat sur la Poste ou des timbres-poste, on recevra l'Ouvrage franco dans toute la France.

Cet Ouvrage peut être considéré comme une introduction aux Applications industrielles de la Mécanique, à la Mécanique analytique, à la Mécanique céleste et aux branches de la Physique mathématique qui se rattachent à la Mécanique; ce qui explique le titre sous lequel on a cru devoir le faire paraître.

La première Partie est consacrée à l'étude du mouvement considéré indépendamment de ses causes. Elle est, pour le fonds, empruntée au *Traité de Cinématique pure* du même Auteur, dont elle reproduit, avec quelques modifications, les matières qui ont trait à la Mécanique. On y a introduit toutes les questions relatives au mouvement d'un point, dont la solution n'exige aucune notion sur la masse et la force; les théorèmes de Binet sur

l'accélération aréolaire; enfin une étude géométrique des perturbations des planètes, basée sur la théorie des accélérations, avec l'application au cas où l'accélération perturbatrice est proportionnelle au carré de la vitesse et est dirigée en sens inverse de cette vitesse.

La seconde Partie du premier Volume traite du mouvement des systèmes matériels et de ses causes. En ce qui concerne le point matériel, on a ajouté à ce que renferment les Traités de Mécanique rationnelle la solution de Jacobi, notablement simplifiée, du problème du mouvement d'un point pesant dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse; l'étude du mouvement du pendule dans un milieu résistant; une théorie du pendule à oscillations elliptiques, et enfin une démonstration géométrique du principe de la moindre action.

L'Auteur a groupé ensuite tous les théorèmes généraux relatifs aux systèmes matériels, quelle qu'en soit la nature, en y faisant figurer les théorèmes de MM. Bertrand, Lejeune-Dirichlet, Yvon Villarceau et Clausius, la similitude en Mécanique (de Newton, exhumée par M. Bertrand), la théorie des petits mouvements comprenant celle de la stabilité de l'équilibre, enfin les formules de Cauchy. Ces généralités sont suivies de l'étude des corps solides, en commençant par la Statique, qui forme un Chapitre dans lequel sont établis, par des démonstrations simples, tous les théorèmes connus sur l'équilibre des solides, les systèmes articulés (avec application aux ponts suspendus, etc.), les polygones et courbes funiculaires; ce Chapitre se termine par la mise en équations du mouvement d'une courbe funiculaire plane avec application aux petites oscillations d'un pendule dont la masse du fil n'est pas négligeable, d'une chaînette et d'un câble de pont suspendu.

L'Auteur a complété la théorie de la rotation des corps, exposée à la fin de son *Traité de Cinématique pure,* en y introduisant les théorèmes de Poinsot, les équations d'un système matériel par rapport à trois axes coordonnés rectangulaires mobiles autour de leur origine, une théorie très-simple du mouvement d'un projectile oblong dans un milieu résistant, enfin les équations générales du mouvement d'un solide mobile autour d'un point fixe, rapportées à trois axes rectangulaires mobiles ayant ce point pour origine. La théorie des chocs qui fait suite se distingue par certaines applications, la généralisation du théorème de Carnot, et les équations générales relatives au choc de deux corps lorsqu'ils sont parfaitement élastiques, mous, semi-élastiques.

Ce premier Volume se termine par la théorie du mouvement d'un corps solide par rapport à un système invariable.

Extrait de la Table des Matières.

TOME PREMIER.

Ire PARTIE. — DU MOUVEMENT CONSIDÉRÉ INDÉPENDAMMENT DE SES CAUSES.

CHAP. I. — *De la vitesse d'un point.* — Mouvement uniforme et varié. — Chute et ascension des corps pesants dans le vide. — Composition et décomposition des vitesses. — Projection d'une vitesse sur une droite ou un plan. — Sommes, différences, produits géométriques. — Composition et décomposition des moments.

CHAP. II. — *Mouvements géométriques des systèmes invariables.* — Classification des mouvements. — Mouvement d'un système invariable parallèlement à un plan ou autour d'un point. — Composition et décomposition des rotations. — Mouvement le plus général d'un système invariable.

CHAP. III. — *De l'accélération dans le mouvement d'un point.* — Différentielles et intégrales géométriques. — Projection de l'accélération sur une droite ou un plan. — Composition et décomposition des accélérations. — Accélérations normale et tangentielle. — Equations du mouvement d'un point. — Théorèmes relatifs aux moments et aux aires. — Théorèmes de Benet. — Mouvement des projectiles dans le vide.

CHAP. IV. — *Des accélérations centrales.* — Equations générales. — Mouvement elliptique des planètes. — Réciproque. — Problème de Kepler. — Des comètes. — Problèmes divers. — Considérations géométriques sur le mouvement et les perturbations des planètes.

CHAP. V. — *Du mouvement d'un point sur une ligne ou une surface fixe.* — Généralités. — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné et une lemniscate. — Pendule simple tautochrone et brachistochrone. — Pendule à oscillations elliptique et conique.

CHAP. VI. — *De l'accélération dans le mouvement d'un système invariable.* — Cas où le système se meut parallèlement à un plan. — Propriétés de l'accélération angulaire. — Accélération et ses projections sur trois axes rectangulaires d'un point d'un système invariable mobile autour d'un point.

CHAP. VII. — *Du mouvement relatif d'un point par rapport à un système invariable.* — Accélérations apparentes. — Gravité apparente. — Théorèmes sur les accélérations centrifuges composées. — Influence de la rotation de la terre sur la chute des graves et le pendule. — Equations du mouvement relatif d'un point. — Trajectoire apparente des projectiles. — Mouvement relatif d'un point pesant sur une courbe plane verticale tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe horizontal.

CHAP. VIII. — *Propriétés géométriques du mouvement relatif d'un corps solide par rapport à un milieu mobile.* — De l'accélération angulaire composée et de ses propriétés. — Formules générales.

IIe PARTIE. — MOUVEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS ET SES CAUSES.

CHAP. I. — *Des forces appliquées à un point matériel.* — Point matériel. — Principe de l'inertie. — Force. — Masse d'un point matériel. — Forces simultanées, tangentielle, centripète. — Egalité entre l'action et la réaction. — Gravitation universelle. — Pesanteur terrestre. — Masses des planètes. — Travail, effort moyen, potentiel. — Surface des niveaux. — Équations du mouvement d'un point. — Projections des quantités de mouvement et de leurs moments sur un axe. — Equation des forces vives. — Réaction de l'inertie, force centrifuge. — Forces apparentes dans le mouvement relatif.

CHAP. II. — *Mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant.* — Mouvement vertical d'un point pesant, d'un projectile, d'une planète.

CHAP. III. — *Mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe.* — Généralités. — Mouvement du pendule dans un milieu résistant.

CHAP. IV. — *Mouvement d'un point matériel sur une surface.* — Généralités. — Pendule à oscillations elliptiques. — Petites oscillations d'un point pesant sur une surface. — Principe de la moindre action.

CHAP. V. — *Principes généraux de la Mécanique.* — Constitution des corps. — Masse et densité. — Pressions. — Théorèmes de M. Bertrand. — Propriétés du centre de la masse et des moments d'inertie. — Centre de gravité et moment d'inertie de quelques corps homogènes. — Equations générales du mouvement d'un système matériel; équation des forces vives. — Principe du travail virtuel. — Equations d'équilibre d'un système libre dans l'hypothèse d'un déplacement compatible avec la solidité d'un système à liaisons. — Stabilité de l'équilibre. — Equations du mouvement d'un système matériel. — Principe du mouvement du centre de gravité. — Théorèmes relatifs aux moments et aux aires de MM. Yvon Villarceau et Clausius. — Similitude en Mécanique. — Des petits mouvements d'un système matériel et de leurs propriétés. — Stabilité et instabilité de l'équilibre, formules de Cauchy.

CHAP. VI. — *De l'équilibre des forces appliquées aux corps solides.* — Equations d'équilibre. — Forces équivalentes, concourantes, parallèles. — Couples. — Attraction des sphères. — Composition des forces centrifuges et des forces d'inertie tangentielles.

— De l'équilibre des corps gênés par des obstacles. — Systèmes articulés, exemples divers. — Polygones et courbes funiculaires. — Ponts suspendus, chaînette, parabole. — Jet sollicité par des forces normales. — Voile de navire. — Applications diverses. — Equation d'un jet compris dans un plan. — Applications.

CHAP. VII. — *Du mouvement d'un corps solide.* — Mouvement d'un axe fixe; axes permanents. — Pendule composé. — Mouvement autour d'un point fixe, équations d'Euler, cas où le corps n'est sollicité par aucune force. — Stabilité des axes de rotation — Théorèmes de Poinsot. — Toupie gyroscopique. — Efforts nécessaires pour déplacer un solide de révolution tournant autour de son axe. — Mouvement d'un solide de révolution rapporté à deux cas rectangulaires tournant autour de son axe. — Mouvement d'un solide entièrement libre. — Dérivation des projectiles. — Mouvement d'un solide assujetti à rester en contact avec un plan — Toupie. — Solide de révolution.

CHAP. VIII. — *Du choc des corps.* — Généralités. — Choc direct : 1° des corps élastiques ; 2° des corps mous. — Vérification du théorème de Carnot. — Effort moyen de compression. — Battage des pilots. — Théorème de Carnot. — Choc direct des corps imparfaitement élastiques. — Pendule balistique. — Recul des armes à feu. — Centre de percussion. — Equations générales. — Choc des corps gênés par des obstacles.

CHAP. IX. — *Du mouvement relatif d'un corps solide par rapport à un système invariable.* — Mouvement du centre de gravité. — Equations générales du mouvement d'un solide autour d'un point relativement fixe. — Application au pendule et au gyroscope. — Composition des forces centrifuges composées dans le cas d'un solide de révolution, application au gyroscope. — Théorie directe de cet appareil. — Appareil pendulaire de M. Sire. — Equation des forces vives en tenant compte des vibrations.

---

877 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

NÉCROLOGIE.

UNIVERSITAS REGIA FREDERICIANA

CHRISTOPHORUM HANSTEEN

MATHESEOS APPLICATÆ QUONDAM PROFESSOREM
VIRUM INGENII DOCTRINÆQUE LAUDIBUS CELEBRATISSIMUM
EX HUJUS ACADEMIÆ FUNDATORIBUS SOLUM HUCUSQUE SUPERSTITEM
DIE XI MENS. APR., ANNO ÆTATIS LXXXIX MORTE DEFUNCTUM ESSE,

HIS LITTERIS INDICAT.

Natus est Hanstenius noster Christianiæ die XXVI mens. Septembr. anno superioris sæculi octogesimo quarto, patre Johanne Matthia Hansteen, vectigalibus regiis præfecto, matre Anna Catharina Treschow. Ex schola cathedrali Christianiensi, cujus tum rector erat Nicolaus Treschow (postea philosophiæ, primum Hauniæ, deinde Christianiæ professor celeberrimus, postremo regiis consiliis adhibitus), in Academiam Hauniensem anno MDCCCII dimissus est. Juris scientiæ, cui se primo dederat, mature valedixit, et anno MDCCCVI collega Gymnasii Fredericoburgensis, quod in Selandia est, constitutus, disciplinas mathematicas docere cœpit, quo factum est, ut paulatim se harum artium studio totum dicaret. Sex annis post Hanstenius præmium, quod Societas scientiarum Reg. Hauniensis ei pollicita erat, qui de magnetismo terrestri optime scripsisset, summa cum laude reportavit et hoc primo opere, quod typis non divulgatum est, ita eruditorum hominum oculos in se convertit, ut mox in nova Universitate, quam Fredericus VI Norvagis, assiduis precibus jam dudum academicam institutionem petentibus, tandem concesserat, professor de-

signaretur. Anno MDCCCXIV, quo tempore salus patriæ summum discrimen adire videbatur, Hanstenius, in patriam redux factus, munus academicum accepit. Paucis tantum præceptoribus Musarum Christianiensium infantia gaudebat, et deerat prorsus supellex, qua iis potissimum opus est, qui rebus naturalibus scrutandis et explicandis vacant. Hanstenius igitur, quum astronomici doctoris provincia ei demandata esset, observationes primo domi suæ, deinde in ligneo tugurio hunc in usum ædificato, facere incepit, mutuato tantum sextante ac horologio pendulo instructus. Sed nihilominus animus solers ac constans victor evasit. In magnetismo terrestri, cui primitias studiorum sacraverat, observando, summa industria usus, perseverabat, et jam anno MDCCCXIX opus illud insigne divulgare potuit, quod inscribitur *Untersuchungen über den Magnetismus der Erde*, et Christianiæ sumptibus regis augustissimi Caroli Joannis comparuit. Duobus annis post mutationes intensitatis, quæ quotidie fiunt, invenit, et anno MDCCCXXVI primus tabulam, intensitatis indicem, publici juris fecit. Sed quominus hisce studiis auspicatissimus finis imponeretur, imprimis obstitit, quod ex Sibiria, ubi intensitas magnetica major est quam ullo alio loco, prorsus nullæ exstabant observationes. Vehemens igitur Hanstenium cepit cupiditas hujus terræ visendæ, plerisque, ne dicamus omnibus, Europæ incolis adhuc ignotæ, et a rege magnisque regni comitiis petere ausus est, ut sibi publicis impensis in Sibiriam proficisci liceret. Qui est laudabilis nostri regiminis artium litterarumque favor, voti compos factus est et annis MDCCCXXVIII seqq. per Russiam Sibiriamque celeberrimum illud iter fecit, quod senex peculiari opere festive ac eleganter descripsit. Doctos naturæ indagatores remotæ illæ regiones tum viderunt paucos; nondum celeberrimus Humboldtius Asiæ montes visitaverat.

Quæ patria Hanstenio debeat hoc loco non enumeranda sunt; sed sufficiet dicere ejus consilio egregiam astronomicam speculam anno MDCCCXXXII conditam esse, eo rectore ac præside pene totam Norvegiam trigonometrice et geographice descriptam, ejus auspiciis tabulas littoris norvegici maximam partem esse confectas, ejus auctoritate pondera mensuramque hujus civitatis publice esse constituta, denique non solum academicam juventutem, sed etiam permultis erectioris ingenii homines, militaribus officiis functos, ejus disciplina usos esse.

In permultas Societates doctas Hanstenius receptus est, etiam mons in Luna observatus ejus nomine appellatur. Anno MDCCCLVI, quum semisecularia publici muneris celebraret, Universitas nostra, gratum animum testificatura, memorialem nummum excudendum curavit, in quo leguntur hæc verba : « SPLENDET IN ORBE DECUS ». Insequentibus annis, impetrata a rege venia, publice legendi officio liberatus erat, donec anno MDCCCLXI munus academicum abdicavit, ita tamen, ut ei in domicilio ad speculam astronomicam, cum munere conjuncto, quoad viveret, habitare concessum sit. Quum fatis nuperrime, ad annos Nestoreos pene provectus, tandem concessisset, funebria justa viro celeberrimo Universitatis auspiciis solenniter et magnifice facta sunt, publica laudatione ab Olao Jacobo Broch, V. Cl. Matheseos professore, in aula academica habita, et cunctis magnorum regni comitiorum membris, regiis consiliariis, supremis regii judicibus, omnibus fere ingenuis hujus urbis ordinibus funeris exequias comitantibus. Jussu absentis regis augustissimi aderat aulæ regiæ præpositus.

Christianiæ, die XXX mensis Maji anno MCCCLXXIII.

C. HOLST,
Secretarius Universitatis.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. L. Saltel. — Soit

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY + 2CX + C'Y + 2C''Z + D = 0$$

l'équation la plus générale des surfaces du second ordre rapportée à des axes coordonnés rectangulaires.

Considérons les trois groupes (α), (β), (γ) de deux équations,

$$(\alpha)\quad \begin{vmatrix} A-S & B'' & C+Sx \\ B'' & A' & C'+Sy \\ B' & B & C''+Sz \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A-S & B'' & C+Sx \\ B'' & A'-S & C'+Sy \\ C+Sx & C'+Sy & D-S(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix} = 0;$$

$$(\beta)\quad \begin{vmatrix} A'-S & B & C'+Sy \\ B & A'' & C''+Sz \\ B'' & B' & C+Sx \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A'-S & B & C'+Sy \\ B & A''-S & C''+Sz \\ C'+Sy & C''+Sz & D-S(x^2+y+z^2) \end{vmatrix} = 0;$$

$$(\gamma)\quad \begin{vmatrix} A''-S & B' & C''+Sz \\ B' & A & C+Sx \\ B & B'' & C'+Sy \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A''-S & B' & C''+Sz \\ B' & A-S & C+Sx \\ C''+Sz & C+Sx & D-S(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix} = 0;$$

et donnons successivement à S les trois valeurs déterminées par l'équation

$$\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix} = 0.$$

Chacun de ces groupes représente les équations des *focales de la surface;* en outre, l'ensemble des deux plans des courbes de contact, correspondant au foyer

(x, y, z), est représenté par l'équation

$$(A - S)X^2 + (A' - S)Y^2 + (A'' - S)Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY + 2(C + Sx)X + 2(C + Sy)Y + 2(C + Sz)Z + D - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0;$$

et, conséquemment, la *directrice* correspondant à ce foyer est l'intersection des deux plans représentés par cette même équation.

Comme application, nous signalerons une série de problèmes qui conduisent à des calculs très-simples; nous les résumerons dans l'énoncé suivant :

Lieu des focales des surfaces du second ordre qui passent par un cercle donné et qui sont, en outre, assujetties à trois autres conditions données.

On considérera, par exemple, le cas où la surface est assujettie à avoir un foyer fixe donné (α, β, γ) et passant par un point donné; on examinera le cas où le foyer est dans le plan du cercle ou sur le cercle, c'est-à-dire si c'est un *ombilic*.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 526

(voir 1re série, t. XIX, p. 234),

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie, à Constantine.

Si l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

a une racine double α, *posons*

$$M = \frac{(ae - 4bd + 3c^2)^3}{(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2} = \frac{I^3}{J^2}.$$

Démontrer les équations suivantes :

$$x = 4\frac{\frac{dM}{da}}{\frac{dM}{db}} = \frac{3}{2}\frac{\frac{dM}{db}}{\frac{dM}{dc}} = \frac{2}{3}\frac{\frac{dM}{dc}}{\frac{dM}{dd}} = \frac{1}{4}\frac{\frac{dM}{dd}}{\frac{dM}{de}}.$$

(MICHAEL ROBERTS.)

Soient

$$f(a, b, c, d, e, x) = 0$$

l'équation proposée, et

$$F(a, b, c, d, e) = I^3 - 27J^2 = 0$$

la condition pour que deux racines de cette équation soient égales ; différentions ces deux équations, on a

$$f'_a da + f'_b db + f'_c dc + f'_d dd + f'_e de + f'_x dx = 0,$$

et

$$F'_a da + F'_b db + F'_c dc + F' dd + F'_e de = 0.$$

Si x devient égal à la racine double α, f'_x s'annule et la première des deux équations précédentes devient

$$\alpha^4 da + 4\alpha^3 db + 6\alpha^2 dc + 4\alpha dd + de = 0.$$

Supposant alors successivement c, d, e ou d, e, a, ou e, a, b, ou a, b, c constants à la fois, les différentielles correspondantes s'annulent et on a les quatre systèmes suivants :

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha^4 da + 4\alpha^3 db = 0, & F'_a da + F'_b db = 0, \\ 4\alpha^3 db + 6\alpha^2 dc = 0, & F'_b db + F'_c dc = 0, \\ 6\alpha^2 dc + 4\alpha dd = 0, & F'_c dc + F'_d dd = 0, \\ 4\alpha dd + de = 0, & F'_d dd + F'_e de = 0, \end{cases}$$

qui donnent, pour α,

$$\alpha = 4\frac{F'_a}{F'_b} = \frac{3}{2}\frac{F'_b}{F'_c} = \frac{2}{3}\frac{F'_c}{F'_d} = \frac{1}{4}\frac{F'_d}{F'_e}.$$

Or

$$M = \frac{I^3}{J^2} = 27 + \frac{I^3 - 27 J^2}{J^2} = 27 + \frac{F(a, b, \ldots)}{J^2},$$

$$\frac{dM}{da} = \frac{J^2 F'_a - 2J \frac{dJ}{da} F(a, b, \ldots)}{J^4} = \frac{F'_a}{J^2};$$

cela montre que les dérivées partielles des fonctions F et M sont proportionnelles et que, la valeur trouvée pour la racine double ne contenant que leurs rapports, on peut y remplacer ces dérivées les unes par les autres. On aura donc enfin

$$\alpha = 4 \frac{\frac{dM}{da}}{\frac{dM}{db}} = \frac{3}{2} \frac{\frac{dM}{db}}{\frac{dM}{dc}} = \frac{2}{3} \frac{\frac{dM}{dc}}{\frac{dM}{dd}} = \frac{1}{4} \frac{\frac{dM}{dd}}{\frac{dM}{de}}.$$

Les raisonnements qui ont servi à établir les relations (1) ne sont nullement particuliers à l'équation du quatrième degré et ils sont facilement applicables à une équation de degré quelconque, ayant un ou plusieurs couples de racines égales.

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 56

(voir 1re série; t. I, p. 521);

Par M. H. BROCARD.

Théorème. — *Étant donné un système de lignes droites situées dans l'espace d'une manière quelconque, on peut mener une infinité de plans dont chacun coupe toutes ces droites.*

Par un point fixe quelconque, menons des parallèles aux droites données; elles détermineront un cône C d'un certain degré.

Si l'on considère une droite renfermée à l'intérieur de la nappe du cône C et partant de son sommet, il est évident que, n'étant parallèle à aucune des génératrices de ce cône, tout plan perpendiculaire à cette droite rencontrera ces génératrices et, par suite, les droites du système donné, qui leur sont parallèles.

La région extérieure au cône C renfermera une infinité de directions de normales à des plans répondant à la question; mais, par exception, quelques-uns de ces plans pourraient être parallèles à des droites du système donné.

Question 972

(voir 2e série, t. VIII, p. 562);

PAR M. GALLOIS.

Reconnaître les différentes surfaces représentées par l'équation

$$a\frac{y+z}{x}+b\frac{x+z}{y}+1=0,$$

quand a et b prennent toutes les valeurs possibles.

Trouver le lieu des centres de ces différentes surfaces.

Indiquer les particularités relatives aux axes de coordonnées, aux sections planes.

Peut-il y avoir des sections circulaires?

Les surfaces peuvent-elles être de révolution?

Montrer que leur enveloppe est une surface du second ordre, lorsque le produit ab est constant.

Je mets l'équation sous forme entière, et je suppose que a et b ne sont jamais nuls à la fois. L'équation, sous sa nouvelle forme, est

$$(1)\qquad bx^2+ay^2+ayz+bzx+xy=0;$$

quels que soient a et b, les surfaces représentées par cette équation sont à centre, et, de plus, l'origine des coordonnées est à la fois un point et un centre de ces surfaces. Cette équation ne peut donc représenter que des cônes ou des variétés du cône.

Considérons les équations du centre

$$2bx + y + bz = 0,$$
$$x + 2ay + az = 0,$$
$$bx + ay = 0.$$

Si le déterminant de ces trois équations est différent de zéro, c'est-à-dire si l'on a $2ab(1 - b - a) \gtrless 0$, les surfaces représentées par l'équation (1) sont à centre unique, et, par suite, ne peuvent être que des cônes; je démontrerai plus loin qu'ils sont toujours réels.

Si le déterminant est nul, c'est-à-dire si l'on a $2ab(1 - b - a) = 0$, les surfaces représentées par l'équation (1) ne peuvent être que des plans : je dis d'abord que ces plans se couperont toujours; car, si l'on considère les équations du centre, on voit que si a et b ont des valeurs finies et différentes de zéro, la dernière équation ne peut se réduire avec aucune des deux premières, puisque son coefficient en z est nul; d'un autre côté, la même conséquence a lieu si une des valeurs, a par exemple, est finie (ou nulle) et l'autre b infinie. Si l'on suppose en même temps $a = \infty$, $b = \infty$, alors les deux premières équations deviennent $2x + z = 0$, $2y + z = 0$ et sont distinctes. Les équations du centre ne pouvant se réduire à moins de deux, on a donc toujours, quand $2ab(1 - b - a) = 0$, deux plans qui se coupent, qui sont aussi toujours réels, comme nous le verrons plus loin. Ainsi, dans le cas général, l'équation proposée représentera des cônes, et, dans les cas particuliers où l'on aurait, ou $a = 0$, ou $b = 0$, ou $a + b = 1$, elle représentera des plans qui se coupent.

Pour trouver le lieu des centres de ces différentes surfaces, il suffit d'éliminer a et b entre les trois équations du centre; des deux premières, on tire $b = -\frac{y}{2x+z}$, $a = -\frac{x}{2y+z}$, et, remplaçant dans la troisième, il vient, pour l'équation du lieu cherché,

$$xy\left(\frac{1}{2x+z}+\frac{1}{2y+z}\right)=0.$$

Le lieu se compose donc de l'ensemble des trois plans $x=0$, $y=0$, $x+y+z=0$. Ce dernier est perpendiculaire à l'intersection des plans bissecteurs des dièdres du trièdre formé par les plans de coordonnées, et, de plus, il passe par l'origine.

Sections par les plans de coordonnées.—Je reprends l'équation

$$bx^2+ay^2+ayz+bzx+xy=0.$$

En faisant, dans cette équation, $x=0$, il reste $ay(y+z)=0$: le plan des zy coupe donc les surfaces suivant deux génératrices, dont l'une est l'axe des z et l'autre la bissectrice de l'angle de la partie positive de l'axe des y et de la partie négative de l'axe des z.

Pour $y=0$, il reste $bx(x+z)=0$; le plan des zx coupe donc aussi les surfaces suivant deux génératrices.

Pour $z=0$, on a $bx^2+ay^2+xy=0$; le plan des xy coupe les surfaces suivant deux génératrices, puisque l'équation $bx^2+ay^2+xy=0$ est homogène; mais ces génératrices peuvent exister ou ne pas exister, suivant les valeurs de a et de b. On peut remarquer que ces droites seront toujours réelles, si l'on a, soit $a=0$, soit $b=0$.

L'axe des z est donc génératrice de la surface.

L'existence certaine de deux droites réelles comme

intersection d'un des plans de coordonnées par les surfaces, puisque je suppose que a et b ne s'annulent pas à la fois, démontre que les surfaces représentées par l'équation proposée sont toujours des cônes réels ou des plans réels qui se coupent.

Pour déterminer la nature des sections, je coupe les surfaces par un plan $lx + my + nz = 0$. Je puis prendre le plan passant par l'origine, puisque, pour des plans parallèles, on a des sections homothétiques. La projection sur le plan des zy de l'intersection sera

$$b(my+nz)^2 + l^2ay^2 + l^2ayz - lbz(my+nz) \\ - ly(my+nz) = 0,$$

ou

$$y^2(bm^2 + al^2 - lm)^2 + z^2(bn^2 - bln) \\ + yz(2bmn + al^2 - lbm - nl) = 0.$$

Cette équation homogène ne peut représenter que des points, des droites qui se coupent ou des droites confondues; les sections peuvent donc être des ellipses, des hyperboles ou des paraboles. Suivant que la quantité $(2bmn + al^2 - lbm - nl)^2 - 4(bm^2 + al^2 - lm)(bn^2 - bln)$ sera négative, positive ou nulle, la courbe d'intersection sera du genre ellipse, hyperbole ou parabole.

On peut vérifier que, quand on a soit $a = 0$, soit $b = 0$, soit $a + b = 1$, cette quantité ne peut être que positive ou nulle.

Pour voir s'il y a des sections circulaires, je coupe par une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, et je forme l'équation des surfaces passant par l'intersection de cette sphère et des surfaces représentées par l'équation proposée. Cette équation est

$$x^2(b+\lambda) + y^2(a+\lambda) + \lambda z^2 + ayz + bzx + xy = 0;$$

j'exprime que cette équation représente deux plans qui

se coupent, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de centres en ligne droite. Je vais donc égaler à zéro le déterminant des équations du centre, qui sont

$$2(b+\lambda)x+y+bz=0,$$
$$x+2(a+\lambda)y+az=0,$$
$$bx+ay+2\lambda z=0.$$

Le déterminant égalé à zéro me donne l'équation

$$8\lambda(a+\lambda)(b+\lambda)+2ab-2(a+\lambda)b^2-2(b+\lambda)a^2-2\lambda=0;$$

je développe, et il vient

$$8\lambda^3+8\lambda^2(a+b)+2\lambda(4ab-b^2-a^2-1)+2ab(1-b-a)=0.$$

Cette équation doit avoir ses trois racines réelles, dont une correspond à deux plans réels, les deux autres à des plans imaginaires. On peut facilement vérifier que, dans l'un des trois cas, $a=0$, $b=0$, $a+b-1=0$, cela a lieu; car l'équation en λ a alors une racine nulle, ce qui indique que les plans cherchés sont précisément l'ensemble des plans représentés par l'équation proposée. Les deux autres racines sont réelles et ont pour expression $\lambda=\frac{2ab\pm\sqrt{5a^2+5b^2+4ab+1}}{2}$. Pour vérifier que, dans le cas général, cette équation a trois racines réelles, il suffit d'exprimer que la plus grande des racines de la dérivée et $+\infty$ donnent des résultats de signes contraires; car, en cherchant les racines de la dérivée, on voit qu'elles sont toujours réelles et qu'elles sont représentées par

$$\lambda=\frac{4(a+b)\pm\sqrt{16(a+b)^2-12(4ab-b^2-a^2-1)}}{2}.$$

L'infini donnant le signe $+$, il suffit d'exprimer que

$\lambda = \frac{4(a+b)+\sqrt{\quad}}{2}$ donne le signe —; en effectuant les réductions, on arrive à une condition toujours remplie.

Pour reconnaître si les surfaces sont de révolution, je vais voir si les conditions $A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}$, qui indiquent que les surfaces représentées par l'équation générale du second degré sont de révolution, peuvent être satisfaites. On suppose, toutefois, chacune des quantités $A - \frac{B'B''}{B} = \ldots \gtrless 0$. Je chercherai directement ce qui arrive dans le cas où ces quantités seraient nulles.

Ces conditions deviennent

$$b - \frac{b}{2a} = a - \frac{a}{2b} = -\frac{ab}{2}.$$

On aura, en supposant a et $b \gtrless 0$ des surfaces de révolution, quand a sera égal à b, et, de plus, $a - \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$; le plan bissecteur des (yz, zx) est alors un plan de symétrie.

Si, maintenant, l'une des quantités a ou b est nulle, on ne peut pas avoir de surfaces de révolution; car on sait que, lorsque, dans une équation du second degré, un seul rectangle manque, celle-ci ne peut représenter une surface de révolution.

Enveloppe dans le cas où ab est constant. — Je remplace b par $\frac{k}{a}$ dans l'équation (1), qui devient

$$(2) \qquad kx^2 + a^2y^2 + a^2yz + kzx + axy = 0.$$

L'équation dérivée étant

$$(3) \qquad 2ay^2 + 2ayz + xy = 0,$$

j'ai à éliminer a entre ces deux équations; de l'équation (3) je tire

$$a = -\frac{x}{2(y+z)},$$

et, reportant dans l'équation (2), il vient, pour l'équation de l'enveloppe,

$$4kx^2(y+z)^2 - x^2y(y+z) + 4kzx(y+z)^2 = 0.$$

Je divise le premier membre par $x(y+z) = 0$, ce qui supprime les solutions $x = 0, y+z = 0$, et il reste

$$4kx(y+z) - xy + 4kz(y+z) = 0,$$

équation du second degré qui représente une surface rapportée à son centre, qui est aussi un point de la surface. Les équations du centre sont

$$\begin{aligned} y(4k-1) + 4kz &= 0, \\ x(4k-1) + 4kz &= 0, \\ kx + ky + 2kz &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations ne peuvent se réduire à deux que si l'on a

$$k = \frac{1}{4}, \quad \text{ou} \quad k = 0;$$

donc, dans tous les autres cas, l'équation trouvée pour l'enveloppe représente un cône : ce cône est alors toujours réel, ce que l'on peut vérifier facilement sur l'équation, au moyen de sections par les plans de coordonnées.

Question 986

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 144);

PAR M. H. LEZ.

Étant donnés, sur l'ovale de Cassini dont les foyers sont f et g, deux points a et b, désignons par α et β les points où les normales en a et b coupent l'axe de la

courbe qui renferme les foyers, et par i le point où cet axe est coupé par la perpendiculaire élevée sur le milieu du segment ab, démontrer la relation

$$\frac{1}{i\beta} - \frac{1}{i\alpha} = \frac{1}{ig} - \frac{1}{if}.$$

(Laguerre.)

On sait que le lieu des points, tels que le produit de leurs distances à deux points fixes f, g soit constant, est représenté par l'équation

$$y^4 + 2(c^2 + x^2)y^2 + x^4 - 2c^2x^2 = a^4 - c^4,$$

d'où

$$y^2 = -(c^2 + x^2) \pm \sqrt{a^4 + 4c^2x^2},$$

et que, si l'on prend $a^2 > 2c^2$, on obtient ce qu'on appelle particulièrement l'ovale de Cassini. Or l'équation générale d'une normale à la courbe étant

$$Y - y = \frac{f'_y(x, y)}{f'_x(x, y)}(X - x),$$

l'équation de la normale au point a sera

$$y - y'' = \frac{y''(x''^2 + y''^2 + c^2)}{x''(x''^2 + y''^2 + c^2)}(x - x''),$$

et celle du point b

$$y - y' = \frac{y'(x'^2 + y'^2 + c^2)}{x'(x'^2 + y'^2 - c^2)}(x - x').$$

En faisant $y = 0$, on aura les abscisses de leurs points de rencontre avec l'axe des x, ou

$$o\alpha = \frac{2c^2x''}{x''^2 + y''^2 + c^2} \quad \text{et} \quad o\beta = \frac{2c^2x'}{x'^2 + y'^2 + c^2};$$

de plus, la perpendiculaire élevée sur le milieu de ab étant

$$2y - y' - y'' = -\frac{x'' - x'}{y'' - y'}(2x - x' - x''),$$

si l'on fait $y = 0$, on aura

$$oi = \frac{y''^2 - y'^2 + x''^2 - x'^2}{2(x'' - x')}.$$

Pour simplifier les calculs, remplaçant y'^2 et y''^2 par leurs valeurs tirées de l'équation générale, il vient

$$o\alpha = \frac{2c^2x''}{\sqrt{a^4 + 4x''^2c^2}} \quad \text{et} \quad o\beta = \frac{2c^2x'}{\sqrt{a^4 + 4x'^2c^2}},$$

et

$$oi = \frac{\sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} - \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')}.$$

Mais

$$if = c + oi = \frac{2c(x'' - x') + \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} - \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')},$$

$$ig = c - oi = \frac{2c(x'' - x') - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} + \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')};$$

par suite, après avoir réduit au même dénominateur, on trouve

$$\frac{1}{if} = \frac{(x'' - x')\left[-2c(x'' - x') - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} + \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}\right]}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}},$$

$$\frac{1}{ig} = \frac{(x'' - x')\left[-2c(x'' - x') - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} + \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}\right]}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}};$$

de même, on a

$$\alpha i = oi - o\alpha = \frac{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')\sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}},$$

$$i\beta = o\beta - oi = \frac{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}},$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha i} = \frac{2(x'' - x')\sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}},$$

$$\frac{1}{i\beta} = \frac{2(x'' - x')\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}.$$

Sous cette forme, on a quatre expressions fractionnaires de même dénominateur, ce qui permet de voir facilement qu'on peut écrire

$$\frac{1}{i\beta} - \frac{1}{i\alpha} = \frac{1}{ig} - \frac{1}{if}$$
$$= \frac{2(x'' - x')\left(\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2} - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\right)}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}}.$$

Remarque. — Quand $a^4 = 4c^4$, on a pour résultat

$$\frac{(x'' - x')\left(\sqrt{c^2 + x'^2} - \sqrt{c^2 + x''^2}\right)}{c\left(x''x' + c^2 - \sqrt{c^2 + x'^2}\sqrt{c^2 + x''^2}\right)}.$$

Question 1009

(voir 2e série, t. IX, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une infinité de cercles tangents en un même point; si deux droites tournent autour de ce point, de manière à faire, avec la ligne des centres, des angles dont la somme soit constante, les circonférences décrites sur les cordes de ces cercles comme diamètres, étant prises deux à deux, ont même axe radical.

(CHADU.)

Supposons d'abord que l'une des deux droites coïncide avec la ligne des centres, la seconde faisant avec celle-ci un angle égal à la somme donnée. Soient OA et OB les cordes interceptées dans l'une quelconque des circonférences du système. Les cercles décrits sur OA et OB comme diamètres ont évidemment pour axe radical OB.

Soient OA' et OB un autre couple de cordes; puisque,

AOA' + AOB' = AOB, il en résulte

$$AOA' = BOB';$$

A'B' est parallèle à AB; il en est de même de la droite qui joint les milieux des cordes OA' et OB'.

Donc les deux circonférences décrites sur OA' et OB', comme diamètres, ont pour axe radical la perpendiculaire abaissée du point commun O sur la ligne AB, c'est-à-dire la ligne OB; donc, etc.

Note. — La même question a été résolue par MM. Brocard et Callandreau.

Question 1001

(voir 2e série, t. IX, p. 431);

PAR M. O. CALLANDREAU.

a et m etant des entiers,

$$\frac{(a^2+a)\left[(a+1)^{m-1}-a^{m-1}\right]}{m-1} \quad et \quad \frac{m(a^2+a)\left[(a+1)^{m-1}-a^{m-1}\right]}{(m-1)\left[(a+1)^m-a^m\right]}$$

ne sont pas l'un la $m^{ième}$ puissance d'un entier, l'autre un entier.

Je développe la première expression, ce qui n'offre aucune difficulté; je trouve

$$a^m + \frac{m}{1.2}a^{m-1} + \frac{m(m-2)}{1.2.3}a^{m-2} + \frac{m(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-3} + \ldots$$
$$+ \frac{m}{m-1}a^2 + \frac{a}{m-1},$$

ce qui est supérieur à a^m et inférieur à $(a+1)^m$, les termes de $(a+1)^m$ étant respectivement plus grands que les correspondants de la proposée. Il suit de là que la première expression n'est pas la $m^{ième}$ puissance d'un entier.

Quant à la seconde expression, si son numérateur était divisible par $(a+1)^m - a^m$, ce nombre étant premier avec a et $a+1$, avec $(a+1)^{m-1} - a^{m-1}$, car un facteur de $(a+1)^m - a^m$ qui diviserait $(a+1)^{m-1} - a^{m-1}$ devrait diviser $(a+1)[(a+1)^{m-1} - a^{m-1}]$ ou $(a+1)^m - a^m - a^{m-1}$, par suite a et enfin $(a+1)$, ce qui est impossible, ce nombre, dis-je, devrait diviser m; mais m est toujours plus petit. Donc, etc.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc.

Question 1006

(voir 2e série, t. IX, p. 432);

PAR M. MORET-BLANC.

L'aire de la courbe, lieu du centre d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite fixe, est la moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres. (H. BROCARD.)

Prenons la droite fixe pour axe des abscisses de la courbe lieu des centres, et, pour position initiale de l'ellipse, celle où le point de contact est à l'extrémité du demi-petit axe OB.

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes; M un point de la courbe pris dans le premier quart, à partir de B; s l'arc BM; $OP = p$ la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en M, et l'angle $BOM = \varphi$.

Appelons encore e l'excentricité de l'ellipse, ξ et η les coordonnées de la courbe lieu des centres, l'origine étant en B, et A l'aire comprise entre la courbe, l'axe

des ξ et les deux ordonnées extrêmes, quand l'ellipse fait un demi-tour.

On a

$$dA = \eta\, d\xi,$$

$$\xi = s - \mathrm{PM}, \quad d\xi = ds - d\mathrm{PM}, \quad \eta = p,$$

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi = a\sqrt{1-e^2}\cos\varphi,$$

d'où

$$ds = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

$$\eta = p = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\overline{\mathrm{PM}}^2 = r^2 - p^2 = a^2 e^4 \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

$$\mathrm{PM} = ae^2 \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi},$$

$$d\mathrm{PM} = ae^2\left[\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} + \frac{e^2 \sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

$$\eta\, d\xi = a^2\sqrt{1-e^2}\left[1 - e^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \frac{e^4\sin^2\varphi(1 - \sin^2\varphi)}{1 - e^2\sin^2\varphi}\right] d\varphi$$

$$= a^2\sqrt{1-e^2}\left(e^2\sin^2\varphi + \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}\right) d\varphi = dA,$$

$$\frac{A}{2} = a^2\sqrt{1-e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^2\sin^2\varphi + \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}\right) d\varphi$$

$$= a^2\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\pi}{4}e^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi\right).$$

Dans cette dernière intégration, on peut remplacer $\sin^2\varphi$ par $\cos^2\varphi$; car, entre o et φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ passent, en sens inverse, par les mêmes valeurs,

$$\int \frac{d\varphi}{1 - e^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi} + \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{1 - e\cos\varphi}.$$

Or

$$\int \frac{d\varphi}{1+e\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{e+\cos\varphi}{1-e\cos\varphi};$$

$\int \frac{d\varphi}{1-e\cos\varphi}$ s'en déduit en changant e en $-e$; donc

$$\int \frac{d\varphi}{1-e\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\cos\varphi - e}{1+e\cos\varphi}.$$

Ces intégrales, prises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, se réduisent à

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc\,cos} e \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc\,cos}(-e);$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d\varphi}{1+e\cos\varphi} + \frac{d\varphi}{1-e\cos\varphi} \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [\operatorname{arc\,cos} e + \operatorname{arc\,cos}(-e)] = \frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}},$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-e^2)\,d\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1-e^2},$$

$$\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} a^2(1-e^2) + \frac{\pi}{4} a^2 e^2 \sqrt{1-e^2},$$

$$A = \pi a^2(1-e^2) + \frac{\pi}{2} a^2 e^2 \sqrt{1-e^2} = \pi b^2 + \frac{\pi}{2}\frac{bc^2}{a}.$$

Cette aire serait égale à celle de l'énoncé si, dans le second terme, ne se trouvait pas le facteur $\sqrt{1-e^2} = \frac{b}{a}$; on voit qu'elle est un peu plus petite que l'aire indiquée.

Note. — La même question a été résolue par M. A. Morel.

Question 1011

(voir 2e série, t. IX, p. 480);

PAR M. O. CALLANDREAU.

On donne un tétraèdre conjugué à une surface du second degré. Si l'on désigne par I *l'indice du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre (par rapport à la surface) et par* R *le rayon de cette sphère, l'expression* $\frac{I}{R^2}$ *a la même valeur pour toutes les sphères inscrites.*

(H. FAURE.)

Soit

$$A_{1,1}x_1^2 + A_{2,2}x_2^2 + A_{3,3}x_3^2 + A_{4,4}x_4^2 = 0$$

l'équation de la surface rapportée au tétraèdre conjugué; l'indice du centre de la sphère sera (2e série, t. IX, p. 38)

$$I = -\frac{f(\alpha)}{f(\beta)},$$

les α représentant les coordonnées du centre de la sphère, les β celles du centre de la surface. Les coordonnées du centre de la sphère sont

$$R, \quad R, \quad R, \quad R;$$

substituant et divisant par R^2, on obtient, pour l'expression de $\frac{I}{R^2}$,

$$\frac{I}{R^2} = -\frac{A_{1,1} + A_{2,2} + A_{3,3} + A_{4,4}}{f(\beta)}.$$

Les indices des sommets du tétraèdre sont respectivement égaux à

$$I_1 = -\frac{A_{1,1}h_1^2}{f(\beta)}, \quad I_2 = -\frac{A_{2,2}h_2^2}{f(\beta)}, \quad I_3 = -\frac{A_{3,3}h_3^2}{f(\beta)}, \quad I_4 = -\frac{A_{4,4}h_4^2}{f(\beta)},$$

h_1, h_2, h_3, h_4 désignant les distances des sommets 1, 2, 3, 4 aux faces opposées; $\frac{1}{R^2}$ devient par là

$$\frac{I_1}{h_1^2} + \frac{I_2}{h_2^2} + \frac{I_3}{h_3^2} + \frac{I_4}{h_4^2}.$$

δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 étant les distances du centre de la surface aux faces opposées aux sommets 1, 2, 3, 4 (2e série, t. IX, p. 320),

$$I_1 = -\frac{h_1}{\delta_1},\quad I_2 = -\frac{h_2}{\delta_2},\quad I_3 = -\frac{h_3}{\delta_3},\quad I_4 = -\frac{h_4}{\delta_4};$$

la somme cherchée est donc égale à la somme des inverses des indices des faces du tétraèdre conjugué. Or cette somme est constante (2e série, t. IX, p. 409); donc, etc.

Question 995

(voir 2e série, t. IX, p. 288);

PAR M. H. LEZ, à Lorrez.

On donne un triangle ABC *et une ellipse qui a pour foyers les deux points* B, C; *trouver le lieu des seconds foyers des ellipses inscrites au triangle* ABC *et dont un foyer est sur l'ellipse donnée.* (LEMOINE.)

On sait que, étant données trois tangentes et un foyer F d'une conique, on peut, en général, trouver l'autre. Il suffit, pour cela, d'abaisser du foyer F des perpendiculaires sur chacune des tangentes et de les prolonger d'une longueur égale à elles-mêmes; le centre du cercle directeur, passant par les trois points ainsi obtenus, est le second foyer cherché, et son rayon égale le grand axe de la conique.

Cette remarque faite, si, d'un point mobile M qui suit le périmètre de l'ellipse donnée ayant son centre en O, on abaisse des perpendiculaires sur chacun des côtés du triangle AFF' et qu'on les prolonge d'une longueur égale à elles-mêmes, le centre M' du cercle variable, passant par les trois points R, S, T ainsi obtenus, décrira la courbe dont le lieu demandé fait partie.

Soient donc $OF = OF' = c$, m et n les coordonnées du sommet A du triangle et γ, δ celles du point M.

L'équation de AF' sera

$$cy + ny - mx - cm = 0,$$

et celle de AF

$$cy - ny + mx - cm = 0.$$

La perpendiculaire MS, abaissée du point M sur AF, sera représentée par

$$(y - \delta) m = (c - n)(x - \gamma);$$

de même on aura, pour la perpendiculaire à AF',

$$(y - \delta) m = (c + n)(\gamma - x).$$

A l'aide de ces équations, on trouve, pour les coordonnées du point R' d'intersection,

$$x = \frac{\gamma (n + c)^2 + (n + c) m\delta - cm^2}{(n + c)^2 + m^2},$$

$$y = \frac{m (n\gamma + c\gamma + m\delta + cn + c^2)}{(n + c)^2 + m^2},$$

et, pour celles du point S',

$$x = \frac{\gamma (n - c)^2 + (n - c) m\delta + cm^2}{(n - c)^2 + m^2},$$

$$y = \frac{m (n\gamma - c\gamma + m\delta - cn + c^2)}{(n - c)^2 + m^2}.$$

Par suite, les coordonnées des points R et S sont

$$x = \frac{\gamma(n+c)^2 + 2(n+c)m\delta - 2cm^2 - m^2\gamma}{(n+c)^2 + m^2},$$

$$y = \frac{2mn\gamma + 2mc\gamma + 2c^2m + 2cmn + m^2\delta - \delta(n+c)^2}{(n+c)^2 + m^2},$$

$$x = \frac{\gamma(n-c)^2 + 2(n-c)m\delta + 2cm^2 - m^2\gamma}{(n-c)^2 + m^2},$$

$$y = \frac{2mn\gamma - 2mc\gamma + 2c^2m - 2cmn + m^2\delta - \delta(n-c)^2}{(n-c)^2 + m^2};$$

de plus, le coefficient angulaire de TS est égal à

$$\frac{m\delta + n\gamma - c\gamma - cn + c^2}{(n-c)\delta + mc - m\gamma},$$

et celui de RS est

$$\frac{m\delta + n\gamma + c\gamma + cn + c^2}{(n+c)\delta - mc - m\gamma}.$$

Avec ces données, on trouve, après réductions faites, que les équations des perpendiculaires élevées sur le milieu de TS et de TR sont

$$(1)\quad (c^2 - cn - c\gamma + n\gamma + m\delta)y = (\gamma m - mc - \delta n + \delta c)(x - c)$$

et

$$(2)\quad (c^2 + cn + c\gamma + n\gamma + m\delta)y = (\gamma m + mc - \delta n - \delta c)(x + c).$$

Ces perpendiculaires passent donc par les foyers F, F'; leur rencontre détermine le centre M' du cercle circonscrit au triangle RST.

Maintenant, pour avoir la courbe décrite par le point M', il suffit d'éliminer les variables γ, δ entre l'équation de l'ellipse

$$b^2\gamma^2 + a^2\delta^2 = a^2b^2 \quad \text{ou} \quad b^2\gamma^2 + (b^2 + c^2)\delta^2 = b^2(b^2 + c^2)$$

et les équations (1) et (2).

Or celles-ci donnent, en faisant

$$c^2 + nx + my = A, \quad mx - ny = D,$$
$$c(n + x) = B, \quad c(m - y) = E,$$

$$\gamma = c\frac{(D - E)(A + B) + (D + E)(A - B)}{(D - E)(A + B) - (D + E)(A - B)} = \frac{c(AD - BE)}{BD - AE},$$

$$\delta = 2c\frac{(D' - E)(D + E)}{(D - E)(A + B) - (D + E)(A - B)} = \frac{c(D^2 - E^2)}{BD - AE};$$

par suite,

$$b^2c^2(AD - BE)^2 + c^2(c^2 + b^2)(D^2 - E^2)^2 - b^2(c^2 + b^2)(BD - AE)^2 = 0$$

ou

$$c^2(D+E)(D-E)[b^2(A+B)(A-B) + (c^2+b^2)(D+E)(D-E)] - b^4(BD - AE)^2 = 0$$

sera l'équation cherchée, où il n'y a plus qu'à remplacer A, B, D, E par leurs valeurs.

Elle est du quatrième degré; elle représente une courbe composée de deux branches passant par les foyers F, F′, l'une qui, en s'ouvrant, s'étend indéfiniment au-dessous de l'axe des X, l'autre qui se replie, se croise au sommet A et, en s'écartant, s'allonge indéfiniment. Inutile de dire que le segment de la première branche, compris dans le triangle entre les foyers F, F′, répond directement à la question.

Remarque. — Dans le cas où le foyer M suivrait un cercle ayant pour centre l'origine O et pour rayon OF $= c$, l'équation du lieu serait

$$c^2(AD - BE)^2 + c^2(D^2 - E^2)^2 - c^2(BD - AE)^2 = 0$$

ou

$$(D + E)(D - E)[(A + B)(A - B) + (D + E)(D - E)] = 0.$$

Comme on le voit, elle se décompose en deux facteurs,

dont l'un est le produit des équations des côtés du triangle et dont l'autre représente un cercle passant par les foyers, ou

$$(m^2+n^2-c^2)x^2+(m^2+n^2-c^2)y^2+4c^2my=c^2(m^2+n^2-c^2).$$

Question 1029

(voir 2e série, t. X, p. 240);

Par M. A. PELLISSIER.

Les extrémités A *et* B *d'une longueur constante* AB *se meuvent sur les côtés d'un angle droit fixe* AOB : *trouver l'enveloppe de la perpendiculaire* BM *à* AB, *calculer la position des points de rebroussement et mener les tangentes en ces points.* (Brocard.)

Soit φ l'angle variable de la droite BM avec l'axe des x; si l'on fait $AB = l$, cette droite a pour équation

$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = l\cos^2\varphi,$$

ou encore

$$l\cos 2\varphi - 2y\cos\varphi + 2x\sin\varphi + l = 0.$$

Posons $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = t$; elle devient

$$l^2\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right) - 2y\left(t+\frac{1}{t}\right) - 2x\sqrt{-1}\left(t-\frac{1}{t}\right) + 2l = 0,$$

ou

$$lt^4 - 2(y+x\sqrt{-1})t^3 + 2lt^2 - 2(y-x\sqrt{-1})t + l = 0.$$

Cette équation étant du quatrième degré en t, on voit déjà que l'enveloppe est une courbe de la quatrième classe, puisqu'on pourra, en général, lui mener quatre tangentes par un point donné. D'ailleurs l'équation de

cette enveloppe s'obtiendra en égalant à zéro le discriminant du premier membre de l'équation considéré comme fonction de t; mais on sait que, pour une forme du quatrième degré,

$$(a, b, c, d, e)(x, y)^4,$$

le discriminant Δ est donné par la formule

$$\Delta = S^3 - 27T^2,$$

où S et T sont les deux invariants de la forme, c'est-à-dire

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$T = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Dans le cas actuel, nous avons

$$S = \tfrac{1}{3}[4l^2 - 3(x^2 + y^2)],$$
$$T = \tfrac{1}{27} l(8l^2 - 9y^2 + 18x^2).$$

L'équation de l'enveloppe sera donc

$$[4l^2 - 3(x^2 + y^2)]^3 = l^2(8l^2 - 9y^2 + 18x^2)^2;$$

c'est donc une courbe du sixième ordre. L'origine est un point double, et, comme il y a une seule tangente $x = 0$ en ce point, c'est un rebroussement. On a un rebroussement symétrique au-dessous de Ox.

Il y a quatre autres points de rebroussement à l'intersection du cercle

$$x^2 + y^2 = \tfrac{4}{3}l^2$$

et de l'hyperbole

$$18x^2 - 9y^2 + 8l^2 = 0.$$

On voit très-facilement que la courbe en ces points a mêmes tangentes que l'hyperbole.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey et Lez.

Question 1022.

(voir 2e série, t. X, p. 192);

PAR M. A. PELLISSIER.

Démontrer que, en un point quelconque d'une spirale équiangle, la conique osculatrice est une ellipse et que le point de contact est à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse, et la tangente de l'angle de ces diamètres est égale à trois fois la tangente de l'angle de la spirale.

(A. WITWORTH.)

1. Si, parallèlement à la tangente d'une courbe et à une distance infiniment petite, on mène une corde, la limite des positions de la droite qui joint le point de contact au milieu de cette corde est une ligne que M. Transon a nommée *axe de déviation* (*Journal de Liouville*, 1841). Cette ligne fait, en général, avec la normale un angle fini α (*angle de déviation*), dont la tangente trigonométrique est donnée par la formule

$$\tan\alpha = \frac{1}{3}\frac{dR}{ds},$$

où R est le rayon de courbure et s l'arc de la courbe considérée (P. SERRET, *Des Méthodes en Géométrie*, p. 98).

Lorsque la courbe est une conique, il est clair que l'axe de déviation en un point n'est autre que le diamètre qui passe par ce point.

2. Considérons une conique ayant avec la courbe donnée un contact du troisième ordre; l'axe de déviation sera alors le même pour les deux courbes au point de contact; ce qu'on peut aussi exprimer en disant que toutes les coniques qui ont en ce point un contact du

troisième ordre avec la courbe donnée ont leurs centres sur une ligne droite (l'axe de déviation). Si nous prenons sur la courbe un point infiniment voisin du premier, l'axe de déviation en ce point rencontrera le premier en un point, et, à la limite, quand les points voisins de la courbe se confondront, ce point de rencontre pourra s'appeler le *centre de déviation*. D'après ce que nous venons de dire, on voit que c'est le centre de la conique ayant avec la courbe, au point considéré, un contact du quatrième ordre, c'est-à-dire de la conique osculatrice. Ainsi la conique osculatrice en un point d'une courbe de degré quelconque est déterminée par les conditions suivantes : elle a son centre au centre de déviation; elle touche la courbe au point donné, et elle a en ce point même courbure.

3. L'application de ces principes au cas de la spirale équiangle conduit facilement à la solution de la question. Soit donc

$$\rho = a e^{m\omega}$$

l'équation de cette courbe en coordonnées polaires; par des formules connues, on a

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\, d\rho,$$

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\omega} = \sqrt{m^2+1}\,\rho, \quad \text{d'où} \quad d\mathrm{R} = \sqrt{m^2+1}\, d\rho.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{3}\frac{d\mathrm{R}}{ds} = \frac{1}{3} m.$$

L'angle de déviation est donc constant.

Prenons deux points M, M′ infiniment voisins sur la courbe; soient Mc, M′c les normales et Md, M′d les axes de déviation en ces points; si nous faisons passer

un cercle par les points M, M', c, il passera aussi par le point d, puisque les angles $d\text{M}c$, $d\text{M}'c$ sont égaux tous deux à α. Cela sera encore vrai à la limite, quand le point M' viendra se confondre avec le point M; mais alors c et d deviennent respectivement le centre de courbure C et le centre de déviation D en M, et le cercle MM'cd devient le cercle décrit sur le rayon de courbure MC comme diamètre. Pour obtenir le point D, il suffira donc de décrire sur MC une circonférence et de mener MD faisant avec MC l'angle α; le point de rencontre D avec la circonférence sera le point cherché.

En résumé, la conique osculatrice a son centre en D; elle est tangente à MT (tangente de la spirale), et elle a au point M un rayon de courbure égal à MC.

Abaissons DP perpendiculaire sur MT; CD étant perpendiculaire sur MD, nous avons deux triangles rectangles CMD et PMD qui donnent

$$\frac{\text{MD}}{\text{DP}} = \frac{\text{CM}}{\text{MD}}.$$

Appelons a' le diamètre DM de la conique, b' son conjugué, p la perpendiculaire DP abaissée du centre sur la tangente et R le rayon de courbure MC; l'égalité précédente deviendra alors

$$\frac{a'}{p} = \frac{\text{R}}{a'} \quad \text{ou} \quad a'^2 = p\text{R}.$$

D'ailleurs, par une propriété bien connue, nous avons aussi

$$\text{R} = \frac{b'^2}{p} \quad \text{ou} \quad b'^2 = p\text{R}.$$

On doit donc avoir $a' = b'$, ce qui montre que la conique osculatrice est une ellipse et que le point de contact est à l'extrémité d'un des diamètres conjugués égaux.

Il reste à faire voir que la tangente de l'angle de ces diamètres est égale à trois fois la tangente de l'angle de la spirale. Appelant V ce dernier angle, on a

$$\tang V = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{1}{m}.$$

L'angle ε des diamètres conjugués égaux est égal à l'angle DMP du diamètre DM avec la tangente MT, c'est-à-dire qu'il est complémentaire de l'angle de déviation α. Par suite,

$$\tang \varepsilon = \cot \alpha = \frac{3}{m}.$$

Donc enfin

$$\tang \varepsilon = 3 \tang V. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Question 1034

(voir 2e série, t. X, p. 336);

PAR M. E. PELLET.

On prend sur une surface du second degré une section plane quelconque; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle passant par l'une ou l'autre des focales de la première. (DARBOUX.)

Ce théorème peut se généraliser et s'énoncer ainsi :

On prend sur une surface du second degré une section plane quelconque; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle circonscrite à une quelconque des surfaces du second degré homofocales à la première.

Je rappellerai d'abord quelques formules. Soit

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une surface du second degré. L'équation du

cône circonscrit à cette surface et ayant pour sommet le point x_0, y_0, z_0 peut se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-\frac{1}{f_0}\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)^2=0,$$

en posant

$$f_0=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1.$$

Si l'on rapporte le cône à ses axes principaux pris pour axes des X, Y, Z, cette équation deviendra

$$S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2=0,$$

S_1, S_2, S_3 étant les racines de l'équation

$$\begin{aligned} S^3+\frac{1}{f_0a^2b^2c^2}[&a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\ &-x_0^2(b^2+c^2)-y_0^2(c^2+a^2)-z_0^2(a^2+b^2)]S^2\\ +\frac{1}{f_0a^2b^2c^2}&(x_0^2+y_0^2+z_0^2-a^2-b^2-c^2)S+\frac{1}{f_0a^2b^2c^2}=0.\end{aligned}$$

D'autre part, soit $\frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}+\frac{z^2}{c^2-u}-1=0$, où u est un paramètre variable, l'équation générale des surfaces homofocales à la surface (1). La valeur du paramètre u pour les surfaces homofocales à (1) qui passent par le point (x_0, y_0, z_0) est donnée par l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2-u}+\frac{y_0^2}{b^2-u}+\frac{z_0^2}{c^2-u}-1=0,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} u^3+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-a^2-b^2-c^2)u&\\ +[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2&\\ -x_0^2(b^2+c^2)-y_0^2(c^2+a^2)-z_0^2(a^2+b^2)]u&\\ +f_0a^2b^2c^2=0.&\end{aligned}$$

On voit immédiatement que les racines de l'équation

en S sont les inverses des racines de l'équation en u; et, en désignant celles-ci par u_1, u_2, u_3, on peut poser

$$S_1 = \frac{1}{u_1}, \quad S_2 = \frac{1}{u_2}, \quad S_3 = \frac{1}{u_3}.$$

En outre, les équations de l'axe des X, dans le premier système d'axes coordonnés, sont

$$\frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2 - u_1}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2 - u_1}} = \frac{z - z_0}{\frac{z_0}{c^2 - u_1}},$$

et l'on aura les équations de l'axe des Y et celles de l'axe des Z en changeant, dans celles-ci, u_1 en u_2 ou en u_3.

Cela posé, soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de la première surface,

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 1 = 0$$

l'équation de la seconde homofocale à la première, a_1^2, b_1^2, c_1^2 représentant $a^2 - u$, $b^2 - u$, $c^2 - u$ respectivement. Si l'on représente par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la section plane, l'équation de son plan pourra s'écrire

$$(3) \qquad \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z - z_0)}{c^2} = 0.$$

Considérons les surfaces représentées par les équations

$$(1') \qquad \frac{x^2}{a^2(f_0 + 1)} + \frac{y^2}{b^2(f_0 + 1)} + \frac{z^2}{c^2(f_0 + 1)} - 1 = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{x^2}{a_1^2(f_0 + 1)} + \frac{y^2}{b_1^2(f_0 + 1)} + \frac{z^2}{c_1^2(f_0 + 1)} - 1 = 0,$$

f_0 désignant toujours la quantité $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1$. Elles forment un système homothétique au système des surfaces (1) et (2); de plus, la surface (1′) passe par le point (x_0, y_0, z_0), et son plan tangent en ce point est le plan (3).

Le cône ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0) et circonscrit à la surface (2′) a pour équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{y^2}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{z^2}{c_1^2(f_0+1)}-1\\ &\quad-\frac{1}{F_0}\left(\frac{xx_0}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{yy_0}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{zz_0}{c_1^2(f_0+1)}-1\right)^2=0,\end{aligned}\right.$$

où

$$F_0=\frac{x_0^2}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{y_0^2}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{z_0^2}{c_1^2(f_0+1)}-1.$$

Si l'on rapporte le cône (4) à ses axes principaux pris pour axes des X, Y, Z, son équation devient

$$\frac{X^2}{U_1}+\frac{Y^2}{U_2}+\frac{Z^2}{U_3}=0,$$

U_1, U_2, U_3 étant les racines de l'équation

$$\frac{x_0^2}{a_1^2(f_0+1)-U}+\frac{y_0^2}{b_1^2(f_0+1)-U}+\frac{z_0^2}{c_1^2(f_0+1)-U}-1=0.$$

Si l'on ajoute aux premiers membres des équations (1′) et (2′) la quantité $\frac{-1}{f_0+1}+1$, les nouvelles équations représenteront les surfaces (1) et (2). Si l'on ajoute la même quantité au premier membre de l'équation (4), on obtient la surface

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{y^2}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{z^2}{c_1^2(f_0+1)}-\frac{1}{f_0+1}\\ &\quad-\frac{1}{F_0}\left(\frac{xx_0}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{yy_0}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{zz_0}{c_1^2(f_0+1)}-1\right)^2=0,\end{aligned}\right.$$

qui a pour équation, dans le système des X, Y, Z,

$$(5') \qquad \frac{X^2}{U_1} + \frac{Y^2}{U_2} + \frac{Z^2}{U_3} - \frac{1}{f_0 + 1} + 1 = 0.$$

Cette surface, d'après l'équation (5), est circonscrite à la surface (1), et la courbe de contact est située dans le plan

$$\frac{xx_0}{a_1^2(f_0+1)} + \frac{yy_0}{b_1^2(f_0+1)} + \frac{zz_0}{c_1^2(f_0+1)} - 1 = 0.$$

Deux des axes des X, Y, Z sont dirigés suivant les axes de la conique intersection de la surface (1) avec le plan (3). Nous les prendrons pour axes des X et des Y. Le plan (3) a alors pour équation, dans le second système d'axes coordonnés,

$$(3') \qquad Z = 0.$$

De plus, il est clair que la racine U_3 de l'équation en U est égale à $-u(f_0+1)$, puisque la surface qui correspond à cette racine est la surface (1').

L'équation (5') peut s'écrire

$$\frac{X^2}{-U_1 \frac{f_0}{f_0+1}} + \frac{Y^2}{-U_2 \frac{f_0}{f_0+1}} + \frac{Z^2}{-U_3 \frac{f_0}{f_0+1}} - 1 = 0.$$

La conique focale de la surface qu'elle représente, située dans le plan $Z = 0$, qui est le plan (3), a donc pour équation

$$(\alpha) \qquad \frac{X^2}{(U_3 - U_1)\frac{f_0}{f_0+1}} + \frac{Y^2}{(U_3 - U_2)\frac{f_0}{f_0+1}} - 1 = 0 \quad \text{avec } Z = 0.$$

Je dis que cette conique coïncide avec l'intersection de la surface (1) avec le plan (3). D'abord les axes ont même direction; il suffit donc de démontrer qu'ils sont

égaux en grandeur. A cet effet, posons

$$U_3 - U_1 = U'_1, \quad U_3 - U_2 = U'_2;$$

U'_1 et U'_2 sont les racines, autres que zéro, de l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2(f_0+1)+U'} + \frac{y_0^2}{b^2(f_0+1)+U'} + \frac{z_0^2}{c^2(f_0+1)+U'} - 1 = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant, dans l'équation en U, U par $U_3 - U' = -u(f_0+1) - U'$, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$\frac{\frac{x_0^2}{a^2}}{a^2(f_0+1)+U'} + \frac{\frac{y_0^2}{b^2}}{b^2(f_0+1)+U'} + \frac{\frac{z_0^2}{c^2}}{c^2(f_0+1)+U'} = 0.$$

On voit donc que

$$-\frac{U'_1}{f_0+1}, \quad -\frac{U'_2}{f_0+1}$$

sont les carrés des axes de la conique intersection de la surface (1) par le plan

$$(6) \qquad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 0,$$

parallèle au plan (3). Les plans (3) et (6) donnent pour intersection, avec la surface (1), des coniques homothétiques, et le carré du rapport d'homothétie, facile à calculer, est $-f_0$; de sorte que les axes de la conique, intersection de (1) et (3), sont

$$\frac{U'_1 f_0}{f_0+1} \quad \text{et} \quad \frac{U'_2 f_0}{f_0+1}.$$

Cette conique coïncide donc avec celle représentée par les équations (α). C. Q. F. D.

En faisant tendre u vers l'une des quantités a^2, b^2, c^2, on a la proposition de M. Darboux.

Question 1057

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 95);

PAR M. T. DOUCET,
Professeur au lycée de Lyon.

En un point M *d'un tore, on mène une droite* MT, *située dans le plan tangent. Soient a et b les points où cette droite coupe la surface; menons les deux sphères qui, passant par* M, *touchent la surface aux points a et b; désignons par* α *et* β *les centres de ces sphères et par* I *le point milieu du segment* $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, *nous menons une droite parallèle à la droite qui joint le point* I *au centre du tore, dirigée dans le même sens et de longueur double, le point extrême de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans le tore par le plan normal passant par* MT. (LAGUERRE.)

Soient O le centre du tore; A celui de la circonférence méridienne, à laquelle appartient le point M; N l'intersection de la droite AM et de l'axe de révolution. Les points A et N sont les centres de courbure des sections principales du tore en M.

Posons $MA = R$, $OA = a$, $MOA = \lambda$. Les rayons de courbure principaux, dont les directions sont opposées pour tout point de la nappe intérieure du tore, sont R et
$\dfrac{a}{\cos\lambda} - R$.

Si l'on désigne par ω l'inclinaison de MT sur la tangente en M au parallèle de ce point et par ρ le rayon de courbure de la section normale, dont le plan est conduit suivant MT, on a, d'après le théorème d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\omega}{R} - \frac{\cos^2\omega}{\dfrac{a}{\cos\lambda} - R},$$

d'où

$$(1) \qquad \rho = \frac{R(a - R\cos\lambda)}{a\sin^2\omega - R\cos\lambda};$$

la direction positive est MA.

Rapportons le tore à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, en prenant pour OZ l'axe de révolution et pour plan des ZY le méridien du point M. L'équation de la surface sera

$$(2) \qquad (X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(X^2 + Y^2) = 0.$$

Pour la rapporter à un autre système rectangulaire Mx, My, Mz, en prenant pour Mz la normale en M et conservant pour plan des zy le méridien de ce point, on a les formules de transformation

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} X = x, \\ Y = a + y\sin\lambda - (z + R)\cos\lambda, \\ Z = y\cos\lambda - (z + R)\sin\lambda. \end{array}\right.$$

Faisons $z = 0$ dans ces expressions de X, Y et Z, et substituons-les dans l'équation (2), nous aurons la section du tore par son plan tangent. L'équation polaire, rapportée au pôle M et à la tangente au parallèle prise pour axe, sera

$$(4) \qquad r^2 + 4ar\sin\omega\sin\lambda + 4a(a\sin^2\omega - R\cos\lambda) = 0.$$

Les deux racines r_1 et r_2 de cette équation, pour la valeur de ω qui convient à MT, correspondent aux points a et b, où cette tangente coupe le tore.

L'équation d'une sphère, passant par le point M et rapportée au second système d'axes, est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2m_1x - 2n_1y - 2p_1z = 0,$$

m_1, n_1, p_1 désignant les coordonnées de son centre α. Si

l'on écrit qu'elle passe aussi au point a, on a

$$(5) \qquad \frac{r_1}{2} = m_1 \cos\omega + n_1 \sin\omega.$$

Exprimons maintenant que le point α est situé sur la normale en a, à la surface du tore.

Par rapport aux premiers axes, la normale en un point X', Y', Z' a les équations suivantes, dans lesquelles on a posé, pour abréger,

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - a^2 - R^2 = t^2,$$

$$\frac{X - X'}{X'} = \frac{Y - Y'}{Y'} = \frac{t^2}{t^2 + 2a^2} \frac{Z - Z'}{Z'}.$$

Si l'on élimine z entre les deux dernières des équations (3), on a

$$(6) \qquad Y \sin\lambda + Z \cos\lambda = a \sin\lambda + y.$$

Pour le point α, appartenant à la normale, on a, d'après les équations de cette droite,

$$Y = \frac{X}{X'} Y', \quad Z = Z' + Z' \frac{t^2 + 2a^2}{t^2} \frac{X - X'}{X'}.$$

Faisons, dans ces valeurs de Y et de Z,

$$X = m_1, \quad X' = r_1 \cos\omega,$$

$$Y' = a + r_1 \sin\omega \sin\lambda - R \cos\lambda, \quad Z' = r_1 \sin\omega \cos\lambda + R \sin\lambda,$$

$$t^2 = r_1^2 + 2a(r_1 \sin\omega \sin\lambda - R \cos\lambda),$$

et substituons, dans l'équation (6), où il faut faire, en outre, $y = n_1$. L'équation obtenue, combinée avec (5), donne

$$m_1 = \frac{R \cos\omega \cos\lambda}{\frac{r_1}{2a} + \sin\omega \sin\lambda};$$

on aurait de même, pour l'x du point β,

$$m_2 = \frac{R \cos\omega \cos\lambda}{\frac{r_2}{2a} + \sin\omega \sin\lambda}.$$

On voit, en se reportant à l'équation (4), que la somme des dénominateurs est nulle; donc

$$m_1 + m_2 = 0.$$

L'équation (5) en r_1, m_1, n_1, ajoutée à l'équation analogue en r_2, m_2, n_2, donne

$$\frac{n_1 + n_2}{2} = - a \sin\lambda.$$

Enfin, à l'équation $\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}$, que fournit la normale et qui a lieu entre m_1, n_1, p_1, ajoutons l'équation analogue entre m_2, n_2, p_2, en ayant soin de remplacer $m_1 + m_2$ et $n_1 + n_2$ par o et $-2a\sin\lambda$, nous obtenons

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = a \cos\lambda - R + \frac{R(a - R\cos\lambda)}{a \sin^2\omega - R\cos\lambda};$$

ainsi les coordonnées m, n et p du point I, si l'on tient compte pour la dernière de l'équation (1), sont

$$m = 0,$$
$$n = - a \sin\lambda,$$
$$p = a \cos\lambda - R + \frac{\rho}{2}.$$

La première montre que le point I est dans le méridien du point M; la deuxième, que la droite IO est parallèle à la normale MA; la troisième que IO et $\frac{\rho}{2}$ sont deux lignes égales et dirigées dans le même sens.

Question 1031

(voir 2e série, t. X, p. 335);

Par M. MORET-BLANC.

Trouver les conditions pour que les deux plus courtes distances entre les côtés opposés d'un quadrilatère gauche se coupent. (A. M.)

Soient ABCD le quadrilatère gauche donné, EF, GH les plus courtes distances des droites AB, CD et AD, BC, lesquelles se coupent en O. Les droites EH, GF étant, par hypothèse, dans un même plan, se rencontreront en un point I qui appartient au plan ABC et au plan ADF. et, par suite, à leur intersection AC.

Cela posé, les triangles ABC et ADC, coupés respectivement par les droites EH, GF, donnent, par le théorème des transversales,

$$AE.BH.CI = AI.BE.CH,$$
$$AI.CF.DG = AG.CI.DF,$$

d'où, en multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs aux deux membres,

$$(1) \qquad AE.BH.CF.DG = AG.BE.CH.DF,$$

c'est-à-dire que le produit de quatre segments non consécutifs doit être égal au produit des quatre autres.

Cette condition est nécessaire; je dis de plus qu'elle est suffisante.

En effet, la relation (1) étant donnée, supposons que les droites EF, GH ne se coupent pas. On pourrait mener, par le point E, une droite EF' s'appuyant sur les droites CH et CD, et l'on aurait

$$(2) \qquad AE.BH.CF'.DG = AG.BE.CH.DF'.$$

Divisant membre à membre les relations (1) et (2), on aurait

$$\frac{CF}{CF'}=\frac{DF}{DF'}, \quad \text{ou} \quad \frac{CF}{DF}=\frac{CF'}{DF'},$$

ce qui est impossible, à moins que le point F′ ne se confonde avec le point F. Donc les droites EF et GH se coupent.

Question 1067

(voir 2e série, t. XI, p. 143);

PAR M. GAMBEY.

Parmi toutes les ellipses qui passent par quatre points, trouver celle dont l'aire est minimum.

(T. DOUCET.)

Soient AA′, BB′ les droites qui joignent, deux à deux, les points donnés, et O leur point d'intersection.

Posons

$$OA=\lambda,$$
$$OA'=\lambda'$$
$$OB=\mu,$$
$$OB'=\mu',$$

et prenons pour axes de coordonnées ces droites elles-mêmes.

L'équation générale des coniques passant par les quatre points donnés est alors

$$\mu\mu'x^2+2hxy+\lambda\lambda'y^2-\mu\mu'(\lambda+\lambda')x-\lambda\lambda'(\mu+\mu')y+\lambda\lambda'\mu\mu'=0,$$

h étant une indéterminée.

Les axes sont généralement obliques et font entre eux un angle donné θ. Passons aux axes rectangulaires en

conservant l'ancien axe des x. Nous savons que, si l'équation générale est représentée par

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

la quantité $\frac{ab - h^2}{\sin^2\theta}$ ne change pas par la transformation. De plus, si l'équation de la conique, rapportée à son centre et à ses axes, est

$$Mx^2 + Ny^2 + F = 0,$$

on sait aussi que l'on a toujours

$$\frac{ab - h^2}{\sin^2\theta} = 4MN.$$

Or, comme la conique doit être une ellipse, on aura aussi toujours $MN > 0$, tant que h^2 sera plus petit que ab.

Enfin, l'aire de l'ellipse étant inversement proportionnelle à la racine carrée du produit MN, il suffit d'étudier la variation de ce produit pour en conclure celle de l'aire.

Remplaçons a et b par leurs valeurs, nous aurons

$$\frac{\lambda\lambda'\mu\mu' - h^2}{\sin^2\theta} = MN.$$

Le minimum de l'aire correspond au maximum de MN. Or ce maximum a lieu pour $h = 0$.

L'équation de l'ellipse demandée est donc

$$\mu\mu' x^2 + \lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x - \lambda\lambda'(\mu + \mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0.$$

Remarque. — Si l'on avait $\lambda\lambda'\mu\mu' = h^2$, le produit MN étant nul, l'aire serait infinie. En effet, l'ellipse est devenue alors une parabole.

Question 1111

(voir 2e série, t. XII, p. 191);

PAR M. MORET-BLANC.

On sait que si a_1 est une valeur approchée de $\sqrt{n}$,

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{n}{a_1}\right), \quad a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{n}{a_2}\right), \quad a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{n}{a_3}\right), \ldots$$

seront des valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{n}$.

On sait aussi que

$$\sqrt{a_1^2 + r} = a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}.$$

Or M. Wœpcke a démontré que, si dans le second membre de cette équation on s'arrête au troisième quotient incomplet, on aura a_2.

On demande à quels quotients incomplets il faudra s'arrêter dans le second membre de cette même équation pour avoir

$$a_3, \quad a_4, \quad a_5, \ldots,$$

ou bien de quelle manière on peut démontrer que les valeurs

$$a_3, \quad a_4, \quad a_5, \ldots$$

ne sont pas comprises dans l'expression

$$a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}$$

(BALTHAZAR BONCOMPAGNI.)

Remarquons d'abord que, a_1 étant approché par défaut, a_2, a_3, a_4,... seront des valeurs approchées par

excès, puisque la moyenne arithmétique de deux nombres a_m, $\frac{n}{a_m}$ est plus grande que leur moyenne géométrique $\sqrt{n}$; et, comme chacune de ces valeurs est moindre que la précédente, elles convergent vers $\sqrt{n}$.

On a, d'après la loi de formation,

$$a_m = \frac{a_{m-1}^2 + n}{2a_{m-1}},$$

ou, en posant $a_p = \frac{R_p}{S_p}$,

$$a_m = \frac{R_{m-1}^2 + nS_{m-1}^2}{2R_{m-1}S_{m-1}}.$$

Exprimant $a_2, a_3, \ldots$ en fonction de a_1 et de r, on a

$$a_2 = \frac{2a_1^2 + r}{2a_1}, \quad a_3 = \frac{8a_1^4 + 8a_1^2 r + r^2}{8a_1^3 + 4a_1 r},$$

$$a_4 = \frac{128a_1^8 + 256a_1^6 r + 160a_1^4 r^2 + 32a_1^2 r^3 + r^4}{128a_1^7 + 192a_1^5 r + 80a_1^3 r^2 + 8a_1 r^3}.$$

$$a_5 = \frac{(128a_1^8 + 256a_1^6 r + 160a_1^4 r^2 + 32a_1^2 r^3 + r^4)^2 + (a_1^2 + r)(128a_1^7 + 192a_1^5 r + 80a_1^3 r^2 + 8a_1 r^3)^2}{2(128a_1^8 + 256a_1^6 r + 160a_1^4 r^2 + 32a_1^2 r^3 + r^4) \times (128a_1^7 + 192a_1^5 r + 80a_1^3 r^2 + 8a_1 r^3)}.$$

....

Ces fractions sont irréductibles si a_1 et r sont premiers entre eux; si ces deux nombres ont pour plus grand commun diviseur d, les deux termes de a_n seront divisibles par $d^{2^{n-2}}$.

Formons maintenant les réduites successives de la fraction continue. Les deux premières étant $\frac{1}{0}$ et $\frac{a_1}{1}$, une réduite de rang quelconque se forme en multipliant respectivement les deux termes de la réduite précédente par $2a_1$ et ajoutant ceux de la réduite antéprécédente

multipliés par r. On obtient ainsi les réduites

$$\frac{1}{0},\quad \frac{a_1}{1},\quad \frac{2a_1^2+r}{2a_1},\quad \frac{4a_1^3+3a_1r}{4a_1^2+r},\quad \frac{8a_1^4+8a_1^2r+r^2}{8a_1^3+4a_1r},$$

$$\frac{16a_1^5+20a_1^3r+5a_1r^2}{16a_1^4+12a_1^2r+r^2},\quad \frac{32a_1^6+48a_1^4r+18a_1^2r^2+r^3}{32a_1^5+32a_1^3r+6a_1r^2},$$

$$\frac{64a_1^7+112a_1^5r^2+56a_1^3r^2+7a_1r^3}{64a_1^6+80a_1^4r+24a_1^2r^2+r^3},$$

$$\frac{128a_1^8+256a_1^6r+160a_1^4r^2+32a_1^2r^3+r^4}{128a_1^7+192a_1^5r+80a_1^3r^2+8a_1r^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On voit que la cinquième réduite est égale à a_3, la neuvième à a_4.

Si l'on désigne ces fractions successives par $\frac{P_0}{Q_0}$, $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$, ..., on a

$$a_1=\frac{P_1}{Q_1},\quad a_2=\frac{P_2}{Q_2},\quad a_3=\frac{P_4}{Q_4},\quad a_4=\frac{P_8}{Q_8}.$$

Toutes les fractions $\frac{P_2}{Q_2}$, $\frac{P_3}{Q_3}$, ... sont irréductibles, si a_1 et r sont premiers entre eux; si ces nombres ont pour plus grand commun diviseur d, les deux termes de $\frac{P_m}{Q_m}$ sont divisibles par d^{m-1}. Toutes ces fractions satisfont d'ailleurs à la condition

$$P_m^2-nQ_m^n=(-r)^m=(P_1^2-nQ_1^2)^m.$$

On peut vérifier, sur toutes les réduites formées, que l'on a

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_m-\sqrt{n}\,Q_m=(P_1-\sqrt{n}\,Q_1)^m, \\ \text{et, par suite,} \\ P_m+\sqrt{n}\,Q_m=(P_1+\sqrt{n}\,Q_1)^m. \end{array}\right.$$

On peut donc, dans chaque développement, égaler séparément les parties rationnelles et les parties irrationnelles. Cette loi subsistant pour les réduites déjà formées, il n'est pas douteux qu'elle ne subsiste aussi pour les autres, puisque la loi de formation reste la même (*).

Or des deux relations

$$P_m - \sqrt{n}Q_m = (P_1 - \sqrt{n}Q_1)^m$$

et

$$P_{2m} - \sqrt{n}Q_{2m} = (P_1 - \sqrt{n}Q_1)^{2m}$$

on tire

$$P_{2m} - \sqrt{n}Q_{2m} = (P_m - \sqrt{n}Q_m)^2,$$

d'où, en égalant séparément les parties rationnelles et les parties irrationnelles,

$$P_{2m} = P_m^2 + nQ_m^2,$$
$$Q_{2m} = 2P_m Q_m,$$
$$\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \frac{P_m^2 + nQ_m^2}{2P_m Q_m}.$$

La réduite $\frac{P_{2m}}{Q_{2m}}$ se déduit donc de $\frac{P_m}{Q_m}$, d'après la même loi qu'un terme de la suite $a_2, a_3, \ldots$ se déduit du précédent ; donc, puisqu'on a

$$a_2 = \frac{P_2}{Q_2}, \quad a_3 = \frac{P_4}{Q_4}, \quad a_4 = \frac{P_8}{Q_8},$$

on aura, en général,

$$a_m = \frac{P_{2^{m-1}}}{Q_{2^{m-1}}}.$$

(*) On peut d'ailleurs vérifier qu'en exprimant P_{m-2}, P_{m-1}, P_m et Q_{m-2}, Q_{m-1}, Q_m en fonction de a_1 et r au moyen de l'une des formules (a), où $P_1 = a_1$, $Q_1 = 1$, et ayant égard à la relation $n = a_1^2 + r$, les formules

$$P_m = 2a_1 P_{m-1} + rP_{m-2} \quad \text{et} \quad Q_m = 2a_1 Q_{m-1} + rQ_{m-2}$$

se réduisent à des identités; donc les formules (a) sont générales.

CATALAN (E.). — Traité élémentaire des Séries. Grand in-8, avec figures; 1860 .... 5 fr.

La Librairie Gauthier-Villars a acquis de la Librairie Leiber l'édition entière de cet Ouvrage de M. Catalan.

L'Auteur a eu pour but d'être utile aux jeunes gens peu familiarisés avec l'Analyse infinitésimale, en leur rendant accessible l'une des théories les plus fécondes et les plus délicates des Mathématiques.

Titres des Chapitres. — CHAP. I. Préliminaires, définitions. — CHAP. II. Théorèmes sur les convergences. — CHAP. III. Sommation de quelques séries. — CHAP. IV. Application des quadratures à la sommation des séries; digression sur les séries divergentes. — CHAP. V. Développements en séries; applications. — CHAP. VI. Sommation des séries, quatre méthodes; applications. — CHAP. VII. Transformations de séries.

PAA DE BRUNO (Le Chevalier Fr.), Docteur ès Sciences, Professeur de Mathématiques à Turin. — **Théorie générale de l'élimination.** Grand in-8; 1859 .... 3 fr. 50 c.

La Librairie Gauthier-Villars, de concert avec l'Auteur, a acquis de la Librairie Leiber l'édition entière de cet Ouvrage.

Ce Livre résume, sous une forme méthodique, tous les travaux d'Euler, de Bezout, de Cauchy, de Jacoby, de Borchardt, de Cayley, etc.

Titres des Chapitres.

Ire PARTIE. *Théorie de l'élimination entre deux équations.* — CHAP. I. Sur les fonctions symétriques des racines et sur leurs propriétés. — CHAP. II. Élimination de la variable entre deux équations à une variable. — CHAP. III. Propriétés et emploi de la résultante dans la recherche des racines communes. — IIe PARTIE. *Théorie de l'élimination dans le cas de trois équations à deux variables.* — CHAP. I. Recherche et propriétés des solutions communes à deux équations à deux variables. — CHAP. II. Élimination des variables entre trois équations à deux variables. — IIIe PARTIE. *Théorie générale de l'élimination.* — CHAP. I. Propriétés relatives aux solutions communes. — CHAP. II. Recherche et formation de la résultante. — NOTES.

FLAMMARION (Camille). — Études et Lectures sur l'Astronomie. In-12; tomes I, II, III, IV, avec Cartes; 1867-1869-1872-1873.
Chaque volume se vend séparément .... 2 fr. 50 c.

Le quatrième volume contient : Le passage de Vénus sur le Soleil, le 8 décembre 1874; les anciens passages. Sur les masses des planètes et la parallaxe du Soleil. Derniers travaux de l'Astronomie, 1869 et 1870. L'éclipse totale de Soleil du 7 août 1869. Les éclipses en 1870, et notamment l'éclipse du siége de Paris. La chronologie ancienne et les éclipses. Spectres des gaz et du Soleil. Étude de la surface du Soleil. La chaleur solaire et ses applications industrielles. Forme et constitution physique de la Lune; sa grandeur apparente. Les marées et la rotation de la Terre. Enregistrement des bolides et aérolithes observés de 1866 à 1870.

HERMANN, ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur de Mathématiques. — **Résumé et Exercices d'Algèbre élémentaire**, à l'usage des Candidats au baccalauréat ès Sciences et aux Écoles du Gouvernement. In-8; 1873 .... 3 fr.

TABLE DES MATIÈRES.

Octobre 1873.

(Deuxième Série.) — Novembre 1873.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

NOVEMBRE 1873.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, boulevard St-Michel, 103,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

Messieurs les Souscripteurs qui désirent ne point éprouver de retard dans la réception du cahier de Janvier 1874 sont priés de *renouveler immédiatement* leur abonnement.

Le numéro de Janvier 1874 paraîtra le 20 Décembre 1873.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

TRAITÉ

DU

CALCUL DES PROBABILITÉS,

PAR H. LAURENT,
RÉPÉTITEUR D'ANALYSE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
MEMBRE DU CERCLE DES ACTUAIRES FRANÇAIS.

UN VOLUME IN-8; 1873. — PRIX : 7 FRANCS 50 CENTIMES.

En envoyant à l'Éditeur un mandat sur la Poste ou des timbres-poste, on recevra l'Ouvrage franco dans toute la France

Les personnes qui désirent étudier le Calcul des Probabilités éprouvent généralement des difficultés qui tiennent moins à la nature du sujet qu'à l'absence de Traités réellement classiques. Et, en effet, pour aborder la célèbre *Théorie analytique des probabilités* de Laplace, il faut déjà être, jusqu'à un certain point, familiarisé avec l'Analyse des hasards, l'auteur ne traitant, comme il l'avoue lui-même, que les questions les plus difficiles; quant aux Livres très-estimés de MM. Lacroix et Cournot, ils sont trop élémentaires, même pour servir d'introduction à la lecture du Traité de Laplace. Il n'en est pas moins vrai que c'est par ces deux derniers Ouvrages qu'il convient d'aborder l'étude des Probabilités. Le Traité de Poisson, sur la probabilité des jugements, écrit, comme son titre l'indique, dans un but spécial, contient cependant une Introduction qui peut être con-

(*Voir la suite à la troisième page.*)

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN;

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

Le théorème qui sert de base à toute la théorie géométrique du mouvement d'une figure plane, invariable dans son plan, est celui-ci :

Quand une figure plane invariable se déplace d'une manière quelconque dans son plan, il existe toujours dans ce plan un point qui, étant considéré comme lié invariablement à la figure mobile, reste fixe pendant le déplacement de la figure, de manière que tout déplacement d'une figure plane, invariable dans son plan, peut être produit par une simple rotation de la figure autour de ce point.

Ce théorème, connu déjà par Descartes et Jean Bernoulli pour quelques cas particuliers, a été énoncé pour la première fois, sous une forme complétement générale et purement géométrique, par M. Chasles, en 1830 (*). Il a été généralisé par le même illustre savant pour le cas d'une figure qui change de forme en restant toujours semblable à elle-même (**).

Les lois géométriques du déplacement d'une figure invariable ne sont que des conséquences des propriétés dont jouit un système de deux figures égales et superposables; de même les lois géométriques du déplacement

(*) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques* de Férussac, t. XIV, p. 321, ou *Correspondance mathématique et physique de l'Observatoire de Bruxelles*, publiée par Quetelet, t. VII, p. 353.

(**) *Loc. cit.*

d'une figure qui se déforme en restant semblable à elle-même découlent des propriétés relatives à un système de deux figures semblables placées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre. Mais la Géométrie moderne connaît un mode plus général de corrélation des figures dont l'égalité et la similitude ne sont que des cas très-particuliers : c'est l'homographie; et l'on peut se demander quelles sont les lois géométriques du déplacement d'une figure qui varie de forme en restant continuellement homographique à elle-même, lois qui doivent être comprises dans les propriétés d'un système de deux figures homographiques.

Je me propose, dans cette Note, d'étudier quelques propriétés purement géométriques du mouvement d'une figure plane qui, en se déplaçant dans son plan, se déforme en même temps continuellement suivant la loi de l'homographie, et de faire voir comment se déduisent de ces propriétés, comme cas particuliers, les deux théorèmes fondamentaux cités de M. Chasles sur les déplacements des figures planes invariables et variables suivant la loi de la similitude.

Dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie* (*), M. Chasles fait mention de ses propres recherches sur cette question, dont les résultats ont fait l'objet d'une partie d'un Cours qu'il avait professé à la Faculté des Sciences de Paris, mais qui n'ont pas été publiées jusqu'à présent. Cette remarque et l'admirable profondeur qui caractérise tous les travaux de son auteur mettent tout à fait hors de doute que le célèbre géomètre avait, entre autres, trouvé depuis longtemps non-seulement toutes les propriétés exposées dans cette Note, mais aussi une multitude d'autres, probablement beaucoup plus impor-

(*) Page 281.

tantes, relatives et au déplacement dans le plan et au déplacement dans l'espace. Néanmoins, dans la littérature de la science, la question sur les mouvements géométriques des figures variables de forme, suivant la loi de l'homographie, est restée inabordée (*); et ce n'est que par cette seule raison que j'ose publier ces quelques résultats bien modestes de mes propres recherches, tout en invoquant la bienveillante indulgence de l'éminent professeur de la Faculté de Paris.

Pour abréger le langage, je désignerai, dans ce qui va suivre, par figure *homographiquement variable*, une figure qui se déforme en restant continuellement homographique à elle-même, et par figure *semblablement variable* une figure continuellement variable de forme, suivant la loi de la similitude.

§ I.

Quand une figure plane *homographiquement variable* Σ se déplace suivant une loi déterminée dans son plan, deux positions quelconques Σ', Σ'' d'un pareil système mobile et variable représentent deux figures homographiques *correspondantes*, c'est-à-dire telles que, si l'on considère dans ces deux figures deux points homologues O', O'' et les deux faisceaux de droites homologues a', b', c', ..., a'', b'', c'', ... passant par ces

(*) Le récent et beau Mémoire de M. Durrande, inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure* pour 1873, traite la question sur le déplacement d'une figure variable de forme suivant la loi de l'homographie, mais pas sous le point de vue purement géométrique dont il s'agit ici; il est exclusivement consacré aux questions plus élevées sur les vitesses et les accélérations des points de la figure mobile. Il en est de même du Mémoire de M. Picart, inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII.

points, deux droites homologues a', a'', pour décrire simultanément deux angles homologues $(a'b')$, $(a''b'')$, doivent tourner dans le *même* sens autour des deux points O′, O″.

Mais on sait que deux figures planes homographiques correspondantes, situées dans le même plan, jouissent des propriétés suivantes, dues à M. Chasles (*) :

a) *Il existe, en général, dans le plan des deux figures, trois points qui, étant considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde figure; deux de ces trois* points doubles *peuvent être imaginaires, mais le troisième est toujours réel.*

b) *Il existe, en général, dans le plan des deux figures, trois droites qui, étant considérées comme appartenant à la première figure, sont elles-mêmes leurs homologues dans la seconde figure; deux de ces trois* droites doubles *peuvent être imaginaires, mais la troisième est toujours réelle.*

c) *Quand deux des trois points doubles sont imaginaires, deux des trois droites doubles sont aussi imaginaires, c'est-à-dire que, quand il n'existe qu'un seul point double réel, il n'existe qu'une seule droite double réelle, et cette droite double réelle est celle sur laquelle sont situés les deux points doubles imaginaires.*

Il est évident, en outre, que le nombre des points doubles imaginaires et des droites doubles imaginaires doit nécessairement être égal à 0 *ou à* 2, *et ne peut jamais être égal à* 1.

D'après ce qui a été dit plus haut, les théorèmes *a*), *b*), *c*) sont immédiatement applicables aux deux posi-

(*) Voir *Géométrie supérieure*, p. 403-405.

tions Σ', Σ'' de la figure mobile et homographiquement variable Σ. On a donc ainsi les propriétés géométriques suivantes du déplacement de Σ :

I. *Quand une figure plane se meut d'une manière quelconque dans son plan et varie en même temps continuellement de forme en restant toujours homographique à elle-même, il existe dans le plan trois points et trois droites, ou un point et une droite, qui, étant considérés comme appartenant à la figure mobile, ne changent pas de position pendant le déplacement.*

En d'autres termes :

II. *Quand une figure plane homographiquement variable se meut d'une manière quelconque dans son plan, tout déplacement d'une première position donnée en une seconde position donnée est équivalent à un mouvement de la figure dans lequel trois points et trois droites, ou un point et une droite de la figure, restent fixes pendant le déplacement considéré.*

Le terme *équivalent* exprime ici que, en réalité, le déplacement de la figure de la première position donnée dans la seconde position peut s'effectuer d'une manière tout à fait différente; mais que ce déplacement peut être produit par un mouvement tel, que trois points et trois droites, ou un point et une droite de la figure, restent fixes. La cinématique des systèmes invariables fournit beaucoup d'exemples de l'importance et de l'utilité des lois de l'équivalence des mouvements.

Pour se former une idée du mouvement réel de la figure, il faut, suivant un procédé bien connu, appliquer le théorème général II au cas d'un déplacement infiniment petit, et se figurer le mouvement fini considéré comme composé d'une infinité de ces déplacements infiniment petits successifs. On conclura alors :

III. *A chaque instant du mouvement d'une figure plane homographiquement variable dans son plan, trois ou un de ses points restent en repos; ces trois points, ou ce point unique, changent d'une position de la figure à l'autre et forment, par leur ensemble dans le plan de la figure, trois courbes ou une courbe, qui sont les lieux géométriques de ces points fixes, de manière que, à chaque instant, le mouvement de trois ou d'un des points de la figure, qui sont amenés respectivement sur ces courbes, s'interrompe pour un intervalle de temps infiniment court.*

A chaque instant, trois ou une des droites de la figure sont en repos, de manière que leurs points ne se déplacent que sur ces droites; sur chacune de ces droites, s'il en existe trois, est situé un des trois points fixes, et s'il n'existe qu'une seule droite immobile, elle ne contient aucun point fixe.

De plus, en observant que deux faisceaux homographiques correspondants de droites et deux systèmes homographiques correspondants de points peuvent donner lieu à la génération d'une section conique quelconque, il est facile de voir que les droites homologues et les *cordes* (*) relatives à deux positions de la figure Σ, dont nous étudions le déplacement, jouissent des propriétés suivantes :

IV. *Si l'on prend deux points homologues de deux positions déterminées d'une figure plane homographiquement variable mobile d'une manière quelconque dans son plan, les points d'intersection respectifs de*

(*) Nous entendons par *corde* la droite qui joint deux points homologues de deux positions Σ', Σ'' de la figure mobile Σ par extension de la signification attribuée à ce terme par M. Chasles dans la théorie des déplacements géométriques d'un système invariable.

toutes les droites qui passent par l'un de ces points avec les droites homologues passant par le second point seront tous situés sur une même conique, contenant les deux points considérés et tangente à la droite homologue de celle qui joint ces deux points.

V. *Si l'on considère deux droites homologues de deux positions d'une figure plane homographiquement variable, mobile d'une manière quelconque dans son plan, et que l'on prenne deux séries de points homologues sur ces droites, les cordes qui joignent ces points deux à deux envelopperont une conique tangente aux deux droites considérées.*

§ II.

Passons au cas du déplacement d'une figure plane *semblablement variable* dans son plan, et voyons ce que deviennent les résultats trouvés dans le § I pour ce cas particulier.

Deux figures sont semblables entre elles quand l'angle entre deux droites quelconques de l'une des figures est égal à l'angle entre les droites homologues de l'autre figure, et les distances homologues dans les deux figures sont entre elles dans un rapport constant.

Deux figures planes semblables représentent un cas particulier d'un système de deux figures planes homographiques, savoir : celui où, dans l'une des dernières, la droite homologue à la droite infiniment éloignée de l'autre figure est elle-même située à l'infini, de manière que deux figures planes semblables peuvent être considérées comme deux figures planes homographiques dont une droite double réelle se trouve à l'infini.

En vertu de ces propriétés particulières, les lois géo-

métriques exprimées par les théorèmes *a*), *b*), *c*) du paragraphe précédent se modifient pour le cas des figures semblables. Commençons par faire voir en quoi consistent ces modifications.

En premier lieu, je dis que le nombre des points doubles réels de deux figures planes semblables et correspondantes, situées dans un même plan, est toujours égal à 1 et ne peut jamais être égal à 3. Soient O′, O″ deux points homologues de ces deux figures; menons par O′ une série de droites et par O″ une seconde série de droites homologues aux premières; les deux faisceaux ainsi obtenus jouiront des propriétés suivantes : 1° ils seront correspondants; 2° tous les angles de l'un des faisceaux seront respectivement égaux aux angles homologues de l'autre; mais il est aisé de s'assurer que le lieu géométrique de tous les points d'intersection des droites homologues appartenant aux deux faisceaux ainsi définis est un cercle. En effet, d'une part, ce lieu doit nécessairement être une courbe du second degré passant par les points O′ et O″; d'autre part, dans le cas actuel, les mêmes arcs de cette courbe sous-tendent des angles homologues égaux dont les sommets sont situés en O′ et O″, c'est-à-dire sur la courbe elle-même, et il n'y a que le cercle qui peut jouir de cette propriété. Mais il suit du raisonnement qui conduit au théorème *a*) du § I que les points doubles de deux figures planes homographiques correspondantes sont trois des quatre points d'intersection des deux coniques qu'on obtient par la considération de deux couples de faisceaux homologues; par suite, les points doubles de deux figures semblables correspondantes seront les points d'intersection de deux cercles; mais, deux cercles ne se coupant qu'en deux points réels et l'un de ces points étant, comme dans le cas général de deux figures homographiques, le point d'intersection de

deux droites homologues qui joignent deux à deux les centres des deux couples de faisceaux considérés, on voit que le second des deux points commun aux deux cercles sera le seul point double réel des deux figures semblables; de plus, les deux cercles ayant, en général, des rayons finis, le seul point double sera situé à distance finie des deux figures, si les dimensions de ces dernières ne sont pas infinies. Ainsi deux des trois points doubles d'un système de deux figures planes homographiques et correspondantes seront, dans le cas particulier considéré, toujours imaginaires, et le troisième sera toujours réel; d'où il suit immédiatement, en vertu de la propriété *c*) du § I, que, dans deux figures semblables et correspondantes, deux des trois droites doubles sont toujours imaginaires et une est toujours réelle, et cette seule droite double réelle doit, en vertu de la propriété caractéristique même des figures semblables, être située à l'infini.

Les théorèmes *a*) et *b*) du paragraphe précédent se transforment donc, pour le cas actuel, en ceux-ci :

a') *Quand deux figures planes semblables et correspondantes sont placées d'une manière quelconque dans un plan, il existe dans ce plan un point réel qui, étant considéré comme appartenant à l'une des figures, est lui-même son homologue dans l'autre figure; ce point est situé à distance finie si les dimensions des deux figures ne sont pas infinies.*

b') *Quand deux figures planes semblables et correspondantes sont placées d'une manière quelconque dans un plan, il existe dans ce plan une droite réelle qui, étant considérée comme appartenant à l'une des figures, est elle-même son homologue dans l'autre figure; cette droite double unique se trouve toujours à l'infini.*

La droite double, étant située à l'infini, n'offre aucun

intérêt pour le genre de recherches qui nous occupe; mais le point double jouit de propriétés particulières importantes au point de vue cinématique. Premièrement on peut toujours le considérer comme situé à distance finie; car, en général, il ne sera question que de figures de dimensions finies. Soit (ω', ω'') ce point double; prenons trois points quelconques A', B', C' de la première figure situés sur une même droite avec le point ω', et les points homologues A'', B'', C'' dans la seconde figure; la fonction anharmonique des quatre points A', B', C', ω' doit être égale à la fonction anharmonique des quatre points A'', B'', C'', ω''. Ainsi

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'\omega'}{\omega'B'} = \frac{A''C''}{C''B''} : \frac{A''\omega''}{\omega''B''};$$

mais, les deux figures étant semblables entre elles, les rapports $\frac{A'C'}{C'B'}$ et $\frac{A''C''}{C''B''}$ sont égaux; donc

$$\frac{A'\omega'}{\omega'B'} = \frac{A''\omega''}{\omega''B''},$$

ou bien, comme les deux points ω', ω'' coïncident en un seul, on aura

$$\frac{A'\omega'}{A''\omega'} = \frac{B'\omega'}{B''\omega'}.$$

Cette proportion exprime que les distances entre le point double et deux points homologues quelconques des deux figures sont entre elles dans un rapport constant, qui est évidemment égal au rapport de deux segments homologues quelconques; d'ailleurs on peut encore vérifier cette propriété immédiatement en considérant le point double comme appartenant à l'une des figures. En outre, les deux figures étant supposées correspondantes, il est clair que, par une rotation d'une d'elles autour du point

double, on pourra les amener dans une position relative telle, que toutes les lignes de l'une deviendront respectivement parallèles aux lignes homologues de l'autre ; alors les deux figures seront placées semblablement (homothétiques), et leur point double sera leur centre de similitude.

La proposition a') et les propriétés du point double de deux figures planes semblables et correspondantes que nous venons d'exposer ont été énoncées pour la première fois, sans démonstration, par M. Chasles (*).

Soient maintenant Σ une figure plane semblablement variable, mobile d'une manière quelconque dans son plan, et Σ', Σ'' deux positions déterminées de cette figure ; en appliquant aux figures Σ', Σ'' la proposition a'), on conclut :

I. *Quand une figure plane semblablement variable se déplace d'une manière quelconque dans son plan, il existe toujours dans ce plan un point qui, étant considéré comme appartenant à la figure mobile, ne change pas de position pendant le déplacement.*

Donc :

II. *Tout déplacement d'une figure plane semblablement variable dans son plan est équivalent à une rotation de la figure autour d'un certain point du plan et une déformation (contraction ou dilatation) simultanée de la figure s'effectuant suivant la loi de la similitude.*

Pour construire ce centre de rotation quand on se donne deux positions Σ', Σ'' de la figure mobile, il suffit de placer la figure Σ'', sans en altérer la forme, semblablement (homothétiquement) par rapport à Σ', et de déterminer ensuite le centre de similitude des deux figures ;

(*) Voir *Bulletin de Férussac*, loc. cit.

ce centre sera le point cherché. Un second mode de construction découle de la propriété, mentionnée plus haut, des points doubles de deux figures semblables : ayant choisi deux couples de points homologues quelconques O′, O″ et P′, P″ dans les deux figures Σ′, Σ″, et deux couples de droites homologues a', a'' et b', b'' passant respectivement par ces points, construisons le point d'intersection A des droites a', a'' et le point d'intersection B des droites b', b''; menons par les points O′, O″, A une circonférence, par P′, P″, B une seconde circonférence; l'un des points d'intersection de ces deux circonférences sera le point de rencontre des droites O′P′ et O″P″, et l'autre sera le point cherché.

Pour un déplacement infiniment petit, le théorème II peut être énoncé ainsi :

III. *A chaque instant du mouvement d'une figure plane semblablement variable dans son plan, un des points de la figure reste fixe, et la figure tourne autour de ce point* (*) *et se déforme infiniment peu en restant semblable à elle-même.*

En considérant un déplacement fini déterminé de Σ comme composé d'une infinité de ces déplacements élémentaires successifs, on peut se former une idée du mouvement réel d'une figure plane semblablement variable dans son plan.

Enfin les droites homologues de deux positions quelconques Σ′, Σ″ de la figure Σ et les cordes qui joignent les points homologues de Σ′, Σ″ jouissent des propriétés suivantes :

(*) On pourrait nommer ce point *pôle de rotation*, comme l'a proposé M. Wiener pour un cas particulier du mouvement d'une figure plane semblablement variable dans son plan, dans un Mémoire inséré dans les *Annali di Matematica* de M. Cremona, série II, t. I, p. 141-142.

IV. *Si l'on prend deux points homologues quelconques de deux positions déterminées d'une figure plane semblablement variable mobile dans son plan, le lieu géométrique des points d'intersection respectifs de toutes les droites qui passent par l'un de ces points avec les droites homologues passant par le second point sera un cercle; ce cercle passera par les deux points donnés et sera tangent à la droite homologue de celle qui joint ces deux points.*

V. *Si l'on prend, dans deux positions déterminées d'une figure plane semblablement variable mobile dans son plan, deux droites homologues quelconques et deux séries de points homologues sur ces droites, les cordes qui joignent deux à deux ces points homologues envelopperont une parabole qui est tangente aux deux droites.*

La première de ces deux propositions découle immédiatement de ce qui a été dit plus haut sur les faisceaux homologues de droites faisant partie de deux figures planes semblables et correspondantes; la seconde est une conséquence d'une propriété connue des divisions anharmoniques semblables et correspondantes.

§ III.

Il nous reste à montrer ce que deviennent les résultats généraux du § I dans le cas le plus simple, celui où la figure plane mobile dans son plan est *invariable* de forme. Ce cas conduit à la considération de deux figures égales et superposables situées dans un même plan.

Deux figures égales et superposables représentent ce cas particulier de deux figures semblables et correspondantes, quand, dans ces dernières, non-seulement les

angles homologues, mais aussi tous les segments homologues sont égaux entre eux.

Afin d'éviter d'inutiles répétitions pour ce cas particulier, il suffit de remarquer que toutes les propriétés de deux figures semblables qui dépendent seulement des rapports d'angles homologues et ne dépendent point des rapports entre les distances homologues doivent aussi s'appliquer aux figures égales et superposables. Il suit de là que les théorèmes a'), b'), I, IV, V du paragraphe précédent subsistent encore pour le cas actuel, en y remplaçant seulement les termes *semblables* et *semblablement variable* par *invariable*; mais les propriétés du point double, dépendant des rapports de longueurs homologues, et les propositions II et III du § II, qui en découlent, se modifient ainsi : le point double de deux figures égales et superposables sera équidistant de deux points homologues quelconques; la proposition II se transforme en ce théorème de M. Chasles que nous avions énoncé au commencement de la Note, et la proposition III en cet autre théorème bien connu, qui exprime que tout mouvement infiniment petit d'une figure plane invariable dans son plan est une rotation autour d'un point de la figure qui reste fixe pendant l'instant considéré, et que l'on nomme *centre instantané de rotation*.

On obtient ainsi les propriétés géométriques connues et fondamentales du déplacement plan des figures planes semblablement variables et invariables comme des cas particuliers du théorème I, § I, relatif au déplacement fini d'une figure plane homographiquement variable dans son plan.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU PARALLÉLOGRAMME DES FORCES;

PAR M. DELÈGUE,
Professeur de Philosophie au lycée de La Rochelle.

Daniel Bernoulli (*), Laplace (**), d'Alembert, Poisson, Francœur (***) ont cherché à démontrer ce théorème fondamental de la Mécanique, sans avoir recours au principe de l'indépendance des mouvements ou à la considération de points invariablement liés entre eux dans l'espace; mais, pour y parvenir, ils ont dû employer les développements en série, suivant la formule de Taylor.

Cauchy (****), vers 1823, et Aymé, en septembre 1836 (*Journal de M. Liouville*), en ont donné une démonstration géométrique; mais ces démonstrations sont assujetties à la considération de forces n'agissant pas dans le même plan; elles ont recours à la Géométrie dans l'espace pour démontrer un théorème que la Géométrie plane peut démontrer plus simplement. C'est ce que je me propose d'établir.

J'admets comme évident ou comme pouvant être facilement démontré, dans la théorie des forces ou causes du mouvement dans la matière inerte :

1° Le principe de symétrie, dont les principales conséquences sont que deux forces égales et directement opposées se détruisent et que deux forces égales, appli-

(*) *Mémoires de Saint-Pétersbourg.*
(**) *Mécanique céleste*, t. I, chap. I.
(***) *Statique.*
(****) *Statique de Monge* (1823), Note de la fin.

quées au même point, ont une résultante dirigée suivant la bissectrice de l'angle plan formé par les deux composantes;

2° Que deux forces, de même direction, appliquées au même point, s'ajoutent, c'est-à-dire peuvent être détruites par deux autres forces égales chacune à chacune aux deux premières et directement opposées. De là résulte ce principe fondamental que : *si deux forces, appliquées au même point, varient, sans changer entre elles de rapport, ni de direction, leur résultante varie dans le même rapport, sans changer de direction* (*).

Théorème de D. Bernoulli. — *La résultante de deux forces représentées en grandeur et en direction par deux droites rectangulaires sera représentée en grandeur par la diagonale du rectangle formé sur les deux composantes.*

Soient les deux forces P, Q rectangulaires; soit AR la direction de leur résultante, je mène la droite FF′ perpendiculaire sur AR.

(*) Appliquer en A le système des forces (2P, 2Q) revient à superposer au système (P, Q) un autre système (P, Q) identique au premier. Si donc (P, Q) a pour résultante R, la résultante totale sera 2R et de même direction que R. Une seconde superposition de (P, Q) donnera pour résultante 3R, et ainsi de suite à l'infini.

Il en sera de même pour $\left(\frac{P}{n}, \frac{Q}{n}\right)$, n étant entier; car, si ce système a pour résultante R′, en le multipliant par n, R′ deviendra nR′, sans changer de direction; mais alors les composantes, étant (P, Q), devront avoir R pour résultante; donc

$$R = nR',$$

donc

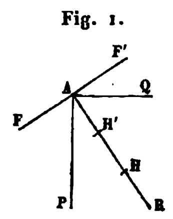
$$R' = \frac{R}{n};$$

n pouvant être aussi grand qu'on voudra, la proposition est encore vraie pour le cas où les variations proportionnelles se feront d'une manière continue.

Les angles FAP, RAQ sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; il en est de même des angles PAR, F'AQ.

Donc les directions FA, AR, AP ; AP, AQ, AR ; F'A, AR, AQ constituent trois faisceaux superposables.

Fig. 1.



Cela posé, j'observe que, de même que AR peut être décomposée en deux forces P et Q de grandeur et de direction données, P peut aussi être décomposée en deux forces rectangulaires H, F, dirigées suivant AR et AF, puisque AF et AR sont dirigées, par rapport à AP, comme AP et AQ le sont par rapport à AR. De plus, en vertu du deuxième axiome, ces deux forces F, H seront proportionnelles à Q, P, et autant de fois plus grandes ou plus petites que Q, P, que P est plus grand ou plus petit que la résultante inconnue R, c'est-à-dire que l'on aura les deux égalités :

$$\frac{F}{H} = \frac{Q}{P}, \quad \frac{F}{Q} = \frac{P}{R}.$$

Il en est de même pour Q ; soient H' et F' les deux composantes de Q.

Nous aurons donc les égalités

$$F = Q \times \frac{P}{R}, \quad F' = P \times \frac{Q}{R},$$

$$H = P \times \frac{P}{R}, \quad H' = Q \times \frac{Q}{R};$$

donc $F = F'$. Mais ces deux forces directement opposées se détruisent; la résultante totale est donc

$$H + H' = R.$$

Remplaçant H et H' par leurs valeurs, nous aurons

$$R = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R};$$

donc

$$R^2 = P^2 + Q^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II. — *La résultante de deux forces rectangulaires, appliquées à un même point* A, *est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du rectangle construit sur les composantes.*

Soient deux droites indéfinies AH, QH' perpendiculaires sur AQ. Je prends sur QH' les longueurs

$$QR = AQ, \quad RR' = AR, \quad R'R'' = AR', \ldots,$$

je mène les diagonales AR, AR', AR'',...; ces diagonales seront bissectrices des angles PAQ, PAR, PAR',....

D'après le théorème de Bernoulli, elles représentent *en grandeur* la résultante de deux forces rectangulaires, l'une Q, constante, représentée par AQ, l'autre P, variable, dirigée suivant AH, et successivement représentée en grandeur par $QR = AP$, $QR' = AP'$, $QR'' = AP''$.

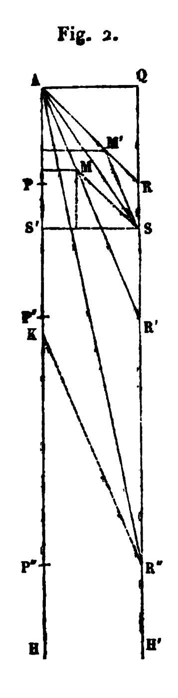
Je dis, de plus, que ces diagonales représentent aussi cette résultante *en direction*.

1° La proposition est évidente pour AR, puisque dans ce cas les deux composantes sont égales et que AR est bissectrice de l'angle PAQ.

Il en est de même pour AR', puisque, les forces AP, AQ se composant en AR, le point A peut être considéré comme sollicité par deux forces égales, savoir : AR, PP', dont la résultante aura pour direction AR', bissectrice

de l'angle PAR; AR′ sera donc à la fois et la résultante du système (AP′, AQ) et celle du système des deux

Fig. 2.



forces égales et obliques AR, PP′ appliquées au point A et représentées par les côtés du losange dont AR′ est la diagonale et l'angle aigu PAR. La même démonstration s'applique à la diagonale AR″.

2° Il en est de même pour AS, bissectrice de l'angle RAR′ = R′AP.

Car, si l'on construit le losange AM′SM semblable au losange AR′R″K et si l'on mène SS′ perpendiculaire sur AP, on voit que la force AS est équivalente au système des forces (AM, AM′); car il a été démontré que AR″ était équivalente au système (AR′, AK).

32.

Mais le système (AM, AM') est équivalent au système (AQ, AS'); car les projections de AS sur AP et AQ sont égales à la somme des projections semblables des droites AM, AM' sur les mêmes axes rectangulaires. De plus, ce qui précède démontre que toute force suivant AM et AM' peut être décomposée en deux forces rectangulaires, représentées par les projections sur AQ et AP des droites qui représentent en grandeur cette force.

Donc AS est la résultante des forces rectangulaires AS', AQ, formant les côtés du rectangle dont AS est la diagonale.

On peut d'ailleurs étendre cette démonstration à toute autre diagonale bissectrice des angles formés par les premières à l'infini. Donc le théorème énoncé est vrai pour toute espèce de rectangle.

Il peut s'étendre aussi à toute espèce de losange : la seule inspection de la figure le démontre.

Il s'étend aussi facilement à toute espèce de parallélogramme; car, dans le parallélogramme, les projections de la diagonale sur deux axes rectangulaires sont aussi égales à la somme des projections des deux côtés qui se coupent sur la diagonale.

Donc, en général, la diagonale d'un parallélogramme représente, en grandeur et en direction, la résultante des deux forces représentées par les deux droites qui se coupent sur la diagonale. C. Q. F. D.

RECTIFICATION.

Dans l'énoncé 1099, remplacer *équilatéraux* par *isoscèles semblables*. α, β, . . . , δ' désignent les points de rencontre des hauteurs. On demande alors quand les trois conditions énoncées sont remplies. (H. Brocard.)

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 297);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

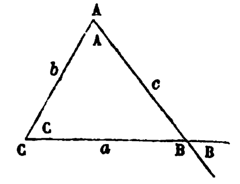
TROISIÈME PARTIE.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES ET QUELQUES AUTRES EXERCICES DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES.

Formules trigonométriques.

90. Pour qui connaît les expressions imaginaires des lignes trigonométriques et se rappelle (48) que le ramun (indiquant une droite égale à l'unité et d'inclinaison + 90 degrés) se calcule précisément comme le signe $\sqrt{-1}$, il sera très-facile d'entendre ce qui va suivre. Je puis donc procéder rapidement, et commencer par la résolution d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c, et dont les angles opposés sont A, B, C (*fig.* 26).

Fig. 26.



L'inclinaison du côté CA sur le côté CB sera C, et l'inclinaison du côté AB sera — B. Par suite, la règle I

$$\text{CA} + \text{AB} \doteq \text{CB}$$

nous donnera

(1) $$b\varepsilon^{C} + c\varepsilon^{-B} \triangleq a.$$

De cette équipollence, sans qu'il soit besoin d'aucune considération géométrique, nous tirerons la résolution du triangle, c'est-à-dire toutes les relations entre les cinq éléments a, b, c, B, C. Quant à l'angle A, il a pour valeur

$$A = \text{inc. AB} - \text{inc. AC} = -B - (C - \pi);$$

par conséquent

(2) $$A + B + C = \pi.$$

91. Pour trouver la relation entre deux côtés et les angles opposés, il suffira d'éliminer a de l'équipollence (1) combinée avec sa conjuguée

$$b\varepsilon^{-C} + c\varepsilon^{B} \triangleq a,$$

et nous aurons

(3) $$b(\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}) \triangleq c(\varepsilon^{B} - \varepsilon^{-B}).$$

La règle XI nous montre que $\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}$ représente une droite perpendiculaire à l'origine des inclinaisons, et dont la longueur dépend uniquement de l'angle C, puisque les droites représentées par ε^{C}, ε^{-C} ont une longueur égale à l'unité. On sait que la moitié de cette droite n'est autre que le sinus de l'angle C; par suite, l'équipollence (3) divisée par $2\sqrt{}$ donne

$$b \sin C = c \sin B.$$

92. Si nous décomposons (5) la droite inclinée ε^{C} en une droite d'inclinaison nulle, et une autre perpendiculaire à celle-là, et si nous appelons *cosinus* et *sinus*

ces deux composantes, nous aurons

(1) $$\varepsilon^{C} \bumpeq \cos C + \sqrt{}\,\sin C,$$

équipollence qui, avec sa conjuguée

$$\varepsilon^{-C} \bumpeq \cos C - \sqrt{}\,\sin C,$$

donnera

(2) $$2\cos C \bumpeq \varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C},$$

(3) $$2\sqrt{}\,\sin C \bumpeq \varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}.$$

Substituant à C son complément $\frac{\pi}{2} - C$, et se rappelant que $\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \bumpeq \sqrt{}$, on démontrerait que $\cos C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$; mais il est inutile de s'arrêter à des notions aussi connues. La tangente étant le rapport du sinus au cosinus est donnée par

$$\operatorname{tang} C \bumpeq \frac{\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}}{\sqrt{}\,(\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C})} \bumpeq \frac{\varepsilon^{2C} - 1}{\sqrt{}\,(\varepsilon^{2C} + 1)}.$$

93. Revenant à la résolution du triangle, cherchons la relation qui existe entre un angle et les côtés. De l'équipollence (1) du n° 90 nous devrons éliminer B, ce qui se fera immédiatement en multipliant

$$a - b\,\varepsilon^{C} \bumpeq c\,\varepsilon^{-B}$$

par l'équipollence conjuguée

$$a - b\,\varepsilon^{-C} \bumpeq c\,\varepsilon^{B},$$

et nous donnera

$$a^2 + b^2 - ab\,(\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C}) \bumpeq c^2.$$

Nous pourrons aisément, par la relation (2) du n° 92, en déduire la valeur de cos C. Autrement, en résolvant

cette équipollence par rapport à ε^{C}, nous aurons

$$(4) \qquad \varepsilon^{C} \bumpeq \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \surd \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}.$$

Cette équipollence, comparée à celle (1) du n° 92, donne les expressions de cos C et de sin C, au moyen des trois côtés. En outre, extrayant la racine de (4), et posant

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = m,$$

on a

$$(5) \qquad \varepsilon^{\frac{C}{2}} \bumpeq \sqrt{\frac{1+m}{2}} + \surd \sqrt{\frac{1-m}{2}},$$

d'où l'on tire aisément les expressions connues de $\cos\frac{C}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{C}{2}$.

94. Il nous reste à chercher la relation entre deux côtés, l'angle compris et un angle opposé. De l'équipollence fondamentale (1) du n° 90 on élimine c en retranchant de

$$b\varepsilon^{B+C} + c \bumpeq a\varepsilon^{B}$$

l'équipollence conjuguée; puis on résout par rapport à ε^{B}, et l'on a

$$\varepsilon^{2B} \bumpeq \frac{a-b\varepsilon^{-C}}{a-b\varepsilon^{C}}.$$

Au moyen de la relation (4) du n° 92, on en déduit

$$(6) \qquad \operatorname{tang} B \bumpeq \frac{b \sin C}{a - b\cos C}$$

et aussi

$$(7) \quad \operatorname{tang}\left(B+\frac{C}{2}\right) \bumpeq \frac{a\varepsilon^{C}-b}{a-b\varepsilon^{C}} : \left(\frac{a\varepsilon \;\; - b}{a-b\varepsilon^{C}}+1\right)\surd \bumpeq \frac{a+b}{a-b}\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Cette relation pourrait aussi s'obtenir en décomposant, au moyen de la règle II, l'équipollence

$$b\varepsilon^{\frac{C}{2}} + c\varepsilon^{-B-\frac{C}{2}} \doteq a\varepsilon^{-\frac{C}{2}}$$

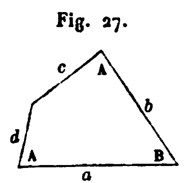
dans les deux équations

$$c\cos\left(B+\frac{C}{2}\right) = (a-b)\cos\frac{C}{2},$$

$$c\sin\left(B+\frac{C}{2}\right) = (a+b)\sin\frac{C}{2}.$$

95. Je ne m'arrêterai pas à démontrer, au moyen des équipollences du n° 92, les formules relatives aux lignes trigonométriques, ces notions étant très-connues. De préférence, j'ajouterai encore un exemple montrant que, dans notre méthode, il n'est nécessaire de recourir à aucune considération géométrique.

Fig. 27.



Supposons que, dans un quadrilatère (*fig.* 27) dont les côtés sont *a*, *b*, *c*, *d*, l'angle intérieur compris entre les côtés *a*, *b* ait pour valeur B, et que A soit la valeur des deux angles opposés compris entre les côtés *b*, *c* et *d*, *a*. En considérant les inclinaisons mutuelles des côtés, on voit que la règle I donne l'équipollence

$$a - b\varepsilon^{-B} + c\varepsilon^{-B-A} \doteq d\varepsilon^{A}.$$

On éliminera B, en multipliant membre à membre l'équipollence

$$a - d\varepsilon^{A} \doteq (b - c\varepsilon^{-A})\varepsilon^{-B}$$

par sa conjuguée. On obtient ainsi

$$(ad - bc)(\varepsilon^{A} + \varepsilon^{-A}) \bumpeq a^2 - b^2 - c^2 + d^2,$$

d'où l'on peut déduire (93) les valeurs de cos A, sin A, sin $\frac{A}{2}$, ...

96. Si u est l'inclinaison de la droite LM sur AB, on a

$$\text{LM} : \text{AB} \bumpeq \varepsilon^{u}\ \text{gr. LM} : \text{gr. AB},$$

et, multipliant (52) par AB cj. AB $\bumpeq$ gr² AB,

(1) $$\text{cj. AB . LM} \bumpeq \text{gr. AB gr. LM}\ \varepsilon^{u}.$$

Combinant cette équipollence (1) avec sa conjuguée, il en résulte

(2) $$\sqrt{}(\text{AB cj. LM} - \text{cj. AB . LM}) \bumpeq 2\,\text{gr. AB gr. LM} \sin u,$$

(3) $$\text{AB cj. LM} + \text{cj. AB . LM} \bumpeq 2\,\text{gr. AB gr. LM} \cos u.$$

Si l'on change LM en AC, la relation (2) nous donne, d'après la règle XII, l'aire du triangle ABC. Les équipollences (2) et (3) peuvent être regardées comme des conséquences des règles XI et X.

Au premier membre de la relation (3) on peut faire subir une transformation telle, que tous les termes soient réduits à avoir une inclinaison nulle, si bien que l'équipollence se change en une équation. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
\text{AB cj. LM} + \text{cj. AB . LM} &\bumpeq \text{AB(cj. AM} - \text{cj. AL)} + \text{cj. AB(AM} - \text{AL)} \\
&\bumpeq (\text{AL} - \text{AB})(\text{cj. AL} - \text{cj. AB}) \\
&\qquad - (\text{AM} - \text{AB})(\text{cj. AM} - \text{cj. AB}) \\
&\qquad - \text{AL cj. AL} + \text{AM cj. AM} \\
&\bumpeq \text{BL cj. BL} - \text{BM cj. BM} \\
&\qquad - \text{AL cj. AL} + \text{AM cj. AM}.
\end{aligned}$$

Ainsi nous aurons (52)

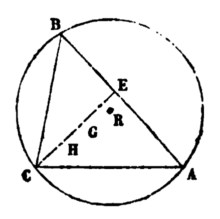
(4) $2\,\text{gr.}\,AB\,\text{gr.}\,LM \cos u \doteqdot \text{gr}^2 AM + \text{gr}^2 BL - \text{gr}^2 AL - \text{gr}^2 BM.$

97. Si, aux règles rappelées plus haut (61), nous ajoutons les définitions exprimées par les formules du n° 92, et les relations (3), (4) du numéro précédent, nous aurons tous les principes de la méthode des équipollences, appliquée à l'étude des figures planes composées de points, de droites ou de circonférences. Toute considération de Géométrie ou de Trigonométrie devient superflue, parce que tout se trouve implicitement compris dans la méthode elle-même; mais, comme on ne peut employer rapidement un instrument, si simple qu'il soit, à moins qu'un exercice répété n'en ait rendu l'usage habituel, nous ajouterons ici divers exemples. On pourra d'ailleurs les étudier seulement jusqu'au n° 120, ou même jusqu'au n° 109, et passer ensuite à la théorie des courbes (133), qui forme la dernière partie de ce Mémoire.

Exercices sur le triangle.

98. Problème. — *Étant donnés deux côtés* CA $= b$ (*fig.* 28), CB $= a$ *et l'angle compris* C, *déterminer la*

Fig. 28.



distance CE $= z$ *du sommet* C *à un point* E *qui divise la base dans un rapport donné.*

La condition du problème est exprimée par $AE \triangleq \frac{e}{c} AB$; appelant u l'angle ACE, on aura

$$c(z\varepsilon^u - b) \triangleq e(a\varepsilon^C - b).$$

Isolant $z\varepsilon^u$, puis multipliant par l'équipollence conjuguée, u disparaît et z est donné par la relation

$$z^2 \triangleq \frac{b^2(c-e)^2 + a^2e^2}{c^2} + \frac{abe(c-e)}{c^2}(\varepsilon^C + \varepsilon^{-C}),$$

dans laquelle (92)

$$\varepsilon^C + \varepsilon^{-C} = 2\cos C.$$

Si c est la longueur du côté AB (et par suite $AE = e$), on a

$$c^2 \triangleq AB\,\mathrm{cj}.AB \triangleq (a\varepsilon^C - b)(a\varepsilon^{-C} - b) \triangleq a^2 + b^2 - ab(\varepsilon^C + \varepsilon^{-C}).$$

Ainsi, de la précédente relation donnant z^2, nous pourrons éliminer l'angle C. Nous aurons de la sorte

$$cz^2 = b^2(c-e) + a^2e - (ce - e),$$

ou

$$AB.(CE)^2 = AE.(CB)^2 + EB.(CA)^2 - AB.AE.EB.$$

99. Théorème. — *Quels que soient les points* A, B, C,..., *et les coefficients numériques* $m, m', m'', \ldots,$ *il existe un point* G, *tel que*

$$m\,GA + m'\,GB + m''\,GC + \ldots \triangleq 0.$$

Dans le cas de trois points seulement, les aires des triangles GAB, GBC, GCA, ABC *sont proportionnelles aux coefficients* m'', m, m', $m + m' + m''$.

Ayant choisi arbitrairement un point O (qui pourra être un des points donnés A, B,...), il sera facile de construire OG, de telle sorte que

$$(m + m' + \ldots)\,OG \triangleq m\,OA + m'\,OB + \ldots,$$

et, d'après la règle I, on verra que le seul point G, ainsi déterminé, satisfait à la condition demandée par le théorème; nous appellerons ce point le *barycentre* (*) des points A, B,... affectés respectivement des coefficients (ou *masses*) m, m',.... Quand tous les coefficients sont égaux, G est dit le *barycentre* des points A, B,....

100. Si, de la précédente équipollence multipliée par cj.OP, nous retranchons sa conjuguée multipliée par OP, nous obtiendrons

$$(m + m' + \ldots)(\mathrm{OG\,cj.OP} - \mathrm{cj.OG.OP})$$
$$\triangleq m(\mathrm{OA\,cj.OP} - \mathrm{cj.OA.OP}) + m'(\mathrm{OB\,cj.OP} - \mathrm{cj.OB.OP}) + \ldots$$

De là, d'après la règle XII,

$$(m + m' + \ldots)\mathrm{GOP} = m\,\mathrm{AOP} + m'\,\mathrm{BOP} + \ldots.$$

Faisant coïncider O, P successivement avec deux des trois points A, B, C, on a les équations

$$(m + m' + m'')\,\mathrm{GBC} = m\ \mathrm{ABC},$$
$$(m + m' + m'')\,\mathrm{GCA} = m'\,\mathrm{BCA},$$
$$(m + m' + m'')\,\mathrm{GAB} = m''\,\mathrm{CAB},$$

qui démontrent la seconde partie du théorème.

On fera attention (57) au signe négatif que prend l'aire d'un triangle lorsqu'on renverse l'ordre dans lequel sont énoncés les sommets.

101. Problème. — *De quels coefficients faut-il affecter les sommets d'un triangle* ABC, *pour que leur barycentre soit le centre* R *du cercle circonscrit?*

(*) Nous employons avec M. Bellavitis ce mot de *barycentre*, plus laconique et peut-être plus expressif que l'expression *centre de gravité*, dont il est l'équivalent. (*Note du Traducteur*.)



Nous pourrions admettre, comme choses très-connues, que l'angle ARB (*fig.* 28) est double de ang. $ACB = C$, et que l'aire du triangle ARB est proportionnelle au sinus de ARB; nous le démontrerons néanmoins au moyen des équipollences.

Pour exprimer la condition que R est équidistant des trois sommets, nous poserons

$$RA \bumpeq r\varepsilon^{\alpha}, \quad RB \bumpeq r\varepsilon^{\beta}, \quad RC \bumpeq r\varepsilon^{\gamma}.$$

D'après la règle XII et le n° 51, on a

$$RAB \bumpeq \frac{\surd}{4} r^2 (\varepsilon^{\alpha-\beta} - \varepsilon^{-\alpha+\beta}) = \frac{r^2}{2} \sin(\beta - \alpha),$$

et, d'après les règles IX et I, le double de l'inclinaison du côté CB, moins le double de l'inclinaison de CA ou 2C, est donné par

$$CB\,\mathrm{cj}.CA : \mathrm{cj}.CB.CA \bumpeq (\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\gamma})(\varepsilon^{-\alpha} - \varepsilon^{-\gamma}) : (\varepsilon^{-\beta} - \varepsilon^{-\gamma})(\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{\gamma})$$
$$\bumpeq \varepsilon^{\gamma+\beta}\,\varepsilon^{-\gamma-\alpha} \bumpeq \varepsilon^{2C}.$$

Donc $\beta - \alpha = 2C$. De là, et d'après le théorème précédent, nous aurons

(1) $$\sin 2A.RA + \sin 2B.RB + \sin 2C.RC \bumpeq 0.$$

102. Problème. — *Déterminer l'intersection commune* H *des trois hauteurs d'un triangle* ABC (*fig.* 28).

La condition que CH, BH soient perpendiculaires aux côtés AB, CA est exprimée par

$$\surd\, CH \bumpeq n\,AB, \quad \surd\, BH \bumpeq m\,CA,$$

équipollences au moyen desquelles nous devrons déterminer m et n. Nous éliminerons d'abord le point inconnu H, ce qui donnera

$$\surd\, CB \bumpeq n\,AB - m\,CA,$$

puis, au moyen de la conjuguée, nous obtiendrons

$$\sqrt{}(\mathrm{CB\,cj.CA} + \mathrm{cj.CB.CA}) \triangleq n(\mathrm{AB\,cj.CA} - \mathrm{cj.AB.CA}).$$

Par les formules (3), (2) du n° 96, ou bien par les règles X et XI, la valeur de n se réduira à une expression trigonométrique. Écrivant CB — CA à la place de AB, on trouve

$$n = \sqrt{}(\mathrm{CB\,cj.CA} + \mathrm{cj.CB.CA}) : (\mathrm{CB\,cj.CA} - \mathrm{cj.CB.CA}) = \cot \mathrm{C}.$$

Donc CH est égal au côté AB divisé par la tangente de l'angle opposé C. Le point H n'eût pas changé si l'on avait cherché, au contraire, l'intersection des droites CH, AH, perpendiculaires aux côtés opposés.

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 102.

Théorème. — *Les trois hauteurs d'un triangle se rencontrent en un même point.*

On peut démontrer ce théorème sans chercher à déterminer le point commun, et sans avoir besoin de recourir aux expressions conjuguées. Soit H le point de rencontre des perpendiculaires CH et BH, abaissées respectivement sur AB et CA. On aura

(1) $$\sqrt{}\mathrm{CH} \triangleq n\,\mathrm{AB}, \quad \sqrt{}\mathrm{BH} \triangleq m\,\mathrm{CA}.$$

Il s'agit de faire voir que AH est perpendiculaire à BC, c'est-à-dire qu'on a

$$\sqrt{}\mathrm{AH} \triangleq l\,\mathrm{BC},$$

l étant un nombre.

Or les équipollences (1) peuvent s'écrire

$$\sqrt{}(\mathrm{AH} - \mathrm{AB} - \mathrm{BC}) \triangleq n\,\mathrm{AB},$$
$$\sqrt{}(\mathrm{AH} - \mathrm{AB}) \triangleq -m\,\mathrm{AB} - m\,\mathrm{BC}.$$

En éliminant AB entre ces deux relations, on trouve

(2) $$\sqrt{}\mathrm{AH} \triangleq \frac{1 - mn}{m + n}\mathrm{BC}.$$

AH est donc bien perpendiculaire à BC, et le coefficient l dont il est parlé ci-dessus est

$$l = \frac{1 - mn}{m + n},$$

ce qui donne entre les trois coefficients la relation remarquable

$$lm + mn + nl = 1.$$

Cette relation peut prendre la forme

$$\frac{\text{gr.AH gr.BH}}{\text{gr.BC gr.CA}} + \frac{\text{gr.BH gr.CH}}{\text{gr.CA gr.AB}} + \frac{\text{gr.CH gr.AH}}{\text{gr.AB gr.BC}} = 1,$$

ou

$$\text{gr.AH gr.HB gr.BA} + \text{gr.BH gr.HC gr.CB} + \text{gr.CH gr.HA gr.AC}$$
$$= \text{gr.AB gr.BC gr.CA},$$

c'est-à-dire que *la somme des produits des côtés des triangles* HAB, HBC, HCA, *pris séparément, est égale au produit des trois côtés du triangle* ABC.

103. Si l'on a

$$\text{AB} \doteq \text{tang}\,\text{C}.\sqrt{\text{CH}},$$
$$\text{BC} \doteq \text{tang}\,\text{A}.\sqrt{\text{AH}},$$
$$\text{CA} \doteq \text{tang}\,\text{B}.\sqrt{\text{BH}},$$

l'équipollence

$$\text{BC} + \text{CA} + \text{AB} \doteq 0$$

nous donne

(2) $\text{tang}\,\text{A}.\text{HA} + \text{tang}\,\text{B}.\text{HB} + \text{tang}\,\text{C}.\text{HC} \doteq 0.$

Les équipollences (1), (2) nous montrent de quels coefficients il faut affecter les sommets du triangle, pour que leur barycentre soit le centre R du cercle circonscrit, ou bien le point de rencontre H des trois hauteurs.

104. Rapportons ce point H au centre du cercle circonscrit. D'après ce qui a été exposé au n° 101, nous aurons

$$\text{AB} \doteq r(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\alpha}), \quad \text{tang}\,\text{C} \doteq \frac{\varepsilon^{\beta-\alpha} - 1}{\sqrt{(\varepsilon^{\beta-\alpha} + 1)}} \quad [92\,(4)].$$

Par suite,

$$\text{CH} \doteq r(\varepsilon^{\beta} + \varepsilon^{\alpha}) \doteq \text{RB} + \text{RA},$$

relation exprimant que CH est double de la distance du

centre R au côté AB, on en conclut l'équipollence remarquable

$$(3) \qquad \mathrm{RH} \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RB} + \mathrm{RC}.$$

Si G est le barycentre des points A, B, C (et il est appelé alors en même temps barycentre du triangle), on a, quel que soit R,

$$3\mathrm{RG} \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RB} + \mathrm{RC};$$

donc

$$\mathrm{RH} \bumpeq 3\mathrm{RG},$$

c'est-à-dire que, *dans tout triangle, le barycentre est situé au tiers de la droite qui va du centre du cercle circonscrit au point de rencontre des trois hauteurs.*

105. Voici une conséquence bien facile de l'équipollence (3). Si à la circonférence de centre R appartient un quatrième point D, et si l'on fait

$$\mathrm{RI} \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RB} + \mathrm{RD},$$
$$\mathrm{RL} \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RD} + \mathrm{RC},$$
$$\mathrm{RM} \bumpeq \mathrm{RD} + \mathrm{RB} + \mathrm{RC},$$

I, L, M seront les points de rencontre des hauteurs des triangles ABD, ADC, DBC. Il résulte de ces équipollences que

$$\mathrm{HI} \bumpeq \mathrm{RI} - \mathrm{RH} \bumpeq \mathrm{CD}, \quad \mathrm{HL} \bumpeq \mathrm{BD}, \quad \mathrm{HM} \bumpeq \mathrm{AD}.$$

Par suite, la figure HILM est égale à DCBA et semblablement placée.

106. Les quatre points A, B, C, H sont liés entre eux par cette propriété, que la droite qui joint deux d'entre eux est perpendiculaire à celle qui passe par les deux autres. Soit O (*fig.* 29) leur barycentre, c'est-à-dire (99) soit qu'on ait

$$\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{OC} + \mathrm{OH} \bumpeq 0.$$

A l'équipollence (3) on peut, au moyen de la règle I, donner la forme

$$2OR \doteq OA + OB + OC - OH;$$

par suite,

$$OR \doteq HO.$$

Pareillement, si R_1, R_2, R_3 sont les centres des cercles circonscrits à HBC, AHC, ABH, on aura

$$OR_1 \doteq AO, \quad OR_2 \doteq BO, \quad OR_3 \doteq CO.$$

La figure R, R_1, R_2, R_3 est égale à HABC et semblablement placée; chaque côté de l'une de ces figures divise perpendiculairement un côté de l'autre en parties égales; A est le centre du cercle circonscrit à $R_1 R_2 R_3$, ...

107. Le point O ci-dessus, qui se trouve déterminé par l'équipollence

$$(4) \qquad RO \doteq \tfrac{1}{2} RH \doteq \tfrac{3}{2} RG \doteq \tfrac{1}{2}(RA + RB + RC),$$

est digne de remarque. Le point milieu A^0 du côté BC est donné par

$$RA^0 \doteq \tfrac{1}{2}(RB + RC);$$

par suite,

$$OA^0 \doteq -\tfrac{1}{2} RA.$$

Donc les points A^0, B^0, C^0 sont sur une circonférence de centre O et d'un rayon égal à la moitié de celui de la circonférence ABC.

Sur cette même circonférence $A^0B^0C^0$, le point A', diamétralement opposé à A^0, sera le milieu de AH (puisque O est le barycentre des quatre points A, B, C, H); en effet, l'équipollence

$$OA' \doteq -OA^0 \doteq \tfrac{1}{2} RA$$

donne

$$OA' \doteq \tfrac{1}{2}(OA - OR) \doteq \tfrac{1}{2}(OA + OH),$$

car (106)

$$-OR \triangleq OH.$$

Tout angle droit $A^0 A_1 A'$ est incrit dans la demi-circonférence de centre O, et, par suite, cette circonférence passe aussi par A_1. Donc :

Pour tout triangle ABC, *il existe un cercle (dont le rayon est la moitié de celui du cercle circonscrit) qui coupe les côtés en leurs points milieux, et passe aussi par les pieds des trois hauteurs du triangle ; il divise, en outre, en deux parties égales ces perpendiculaires* AH, BH, CH, *terminées à leur point commun d'intersection. Son centre est situé au milieu de la droite qui unit le centre du cercle circonscrit au point d'intersection* H *des trois hauteurs.*

108. Problème. — *Déterminer le centre* P *du cercle inscrit dans le triangle* ABC (*fig.* 29).

Les triangles PAB, PBC, PCA, ayant des hauteurs égales, sont proportionnels à leurs bases, lesquelles sont elles-mêmes proportionnelles aux sinus des angles opposés; par suite (99), on a

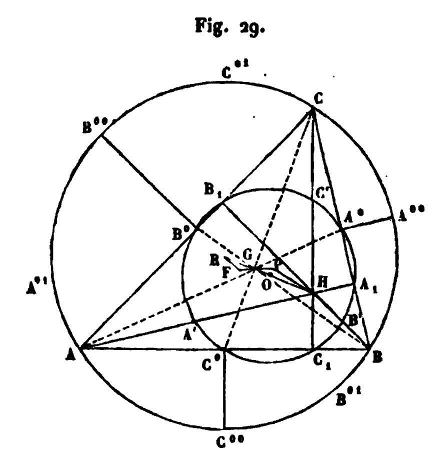
$$(5) \qquad \sin A . PA + \sin B . PB + \sin C . PC \triangleq 0.$$

Nous pourrons exprimer les relations (1), (2), (5), en disant que *le centre du cercle circonscrit, le point de rencontre des trois hauteurs et le centre du cercle inscrit sont les barycentres des sommets du triangle, affectés de coefficients respectivement proportionnels aux produits des sinus par les cosinus, aux tangentes, ou aux sinus des angles opposés.*

Les arcs BC, CA, AB du cercle circonscrit étant divisés par moitié en A^{00}, B^{00}, C^{00}, le centre P du cercle inscrit

est le point de rencontre des droites AA^{00}, BB^{00}, CC^{00}, lesquelles sont perpendiculaires aux côtés du triangle

Fig. 29.



$A^{00}B^{00}C^{00}$; P est donc, par rapport à ce triangle, ce qu'est H par rapport à ABC, et, par suite, la relation (3) nous donne

$$(6) \qquad RP \bumpeq RA^{00} + RB^{00} + RC^{00}.$$

Si l'on n'avait pas voulu profiter de ces faciles considérations géométriques, les formules du n° 101 nous eussent conduit directement à l'équipollence (6), à laquelle on peut donner la forme

$$A^{00}P \bumpeq C^{01}B^{00} \bumpeq B^{01}C^{00},$$

C^{01}, B^{01}, A^{01} étant les points diamétralement opposés à C^{00}, B^{00}, A^{00}. Ces points, de même que C^{00}, B^{00}, A^{00}, divisent aussi en parties égales les arcs AB, CA, BC, et l'on a trois autres points P_1, P_2, P_3, équidistants des côtés du triangle ABC, et qui sont les centres des cercles

exinscrits. Ils sont fournis par les équipollences

$$RP_1 \triangleq RA^{oo} + RB^{o1} + RC^{o1} \triangleq RA^{oo} - RB^{oo} - RC^{oo},$$
$$RP_2 \triangleq - RA^{oo} + RB^{oo} - RC^{oo},$$
$$RP_3 \triangleq - RA^{oo} - RB^{oo} + RC^{oo}.$$

Elles nous montrent que A^{oo}, B^{oo}, C^{oo}, A^{o1}, B^{o1}, C^{o1} sont les milieux des distances PP_1, PP_2, PP_3, P_2P_3, P_1P_3, P_2P_1, et que

(7) $$RP \triangleq RP_1 + RP_2 + RP_3 \triangleq o,$$

c'est-à-dire que *le centre du cercle circonscrit est le barycentre des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits.*

Ce que les points H, O sont par rapport au triangle ABC, les points P, R le sont par rapport au triangle $P_1P_2P_3$, et, sur la droite PR, on pourrait également déterminer les points qui seraient, par rapport au second triangle, ce que sont G, R par rapport au premier.

109. Cherchons à déterminer par voie directe le rayon p du cercle inscrit, au moyen de celui r du cercle circonscrit. Si les inclinaisons α, β, γ (101) sont rangées par ordre de grandeurs croissantes, les perpendiculaires abaissées de P sur les côtés AB, BC, CA seront $p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $p\varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}}$, $-p\varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}$. Puisque le pied de la première tombe sur la droite AB, dont les extrémités sont données par

$$RA \triangleq r\varepsilon^{\alpha}, \quad RB \triangleq r\varepsilon^{\beta},$$

on devra avoir (44)

$$RP + p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \triangleq (1-m)r\varepsilon^{\alpha} + mr\varepsilon^{\beta},$$

ou

$$\frac{RP + p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{\alpha}}{\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\alpha}} \triangleq mr.$$

Le premier membre doit donc être équipollent à son conjugué

$$\frac{\text{cj.}\,\mathrm{RP} + p\varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{-\alpha}}{\varepsilon^{-\beta}-\varepsilon^{-\alpha}} \triangleq \frac{\varepsilon^{\alpha+\beta}\,\text{cj.}\,\mathrm{RP} + p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{\alpha}-\varepsilon^{\beta}};$$

d'où

$$2p \triangleq r\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + r\varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}} - \varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\mathrm{RP} - \varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\text{cj.}\,\mathrm{RP}.$$

De la même manière, les deux autres perpendiculaires donneront

$$2p \triangleq r\left(\varepsilon^{\frac{\beta-\gamma}{2}} + \varepsilon^{\frac{\gamma-\beta}{2}}\right) - \varepsilon^{-\frac{\beta+\gamma}{2}}\,\mathrm{RP} - \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}}\,\text{cj.}\,\mathrm{RP},$$

$$-2p \triangleq r\left(\varepsilon^{\frac{\gamma-\alpha}{2}} + \varepsilon^{\frac{\alpha-\gamma}{2}}\right) - \varepsilon^{-\frac{\gamma+\alpha}{2}}\,\mathrm{RP} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}\,\text{cj.}\,\mathrm{RP}.$$

Dans ces trois équipollences, nous considérerons RP, cj. RP, $2p$, comme trois inconnues différentes, et nous trouverons

$$\mathrm{RP} \triangleq r\left(\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right),$$

(8) $$2\left(\frac{p+r}{r}\right) \triangleq \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\gamma}{2}} + \varepsilon^{\frac{\gamma-\beta}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma-\alpha}{2}} - \varepsilon^{\frac{\alpha-\gamma}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p}{r} + 1 = \cos \mathrm{C} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{A}.$$

Il est facile de reconnaître que $r\cos \mathrm{C}$ est la distance de R au côté AB; nous le démontrerons en observant que $r\left(\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}}\right)$ ne diffère qu'en direction de

$$r(\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\beta}) \triangleq \mathrm{RA} + \mathrm{RB},$$

laquelle expression, à cause de gr. RA = gr. RB, est double de cette distance.

Nous avons, en outre,

$$\frac{2p}{r} - 1 \triangleq -\left(\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right)\left(\varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{-\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{-\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right)$$

$$\triangleq -\frac{1}{r^2}\,\mathrm{RP}\ \mathrm{cj.RP}.$$

Par suite, *la somme des rayons r, p des cercles circonscrit et inscrit est égale* (104) *à la demi-somme des distances des sommets du triangle au point de rencontre* H *des trois hauteurs, et la distance* RP *de leurs centres est moyenne proportionnelle entre r et r — 2p.*

(*A suivre.*)

SUR LE TÉTRAÈDRE;

PAR M. ABEL TRANSON.

Entre le triangle (*trigone*), qui est le plus simple des polygones, et le tétraèdre, qui est le plus simple des polyèdres, il existe plusieurs analogies dont l'une, que je présenterai à la fin de cette Note, n'a pas été, que je sache, remarquée jusqu'ici.

Comme il y a pour le triangle trois équations exprimant que chacun des côtés est égal à la somme des projections des deux autres sur lui-même, il y a, pour le tétraèdre, quatre équations exprimant que chacune des faces est égale à la projection des trois autres sur elle-même.

Soient les aires des faces du tétraèdre ABCD, représentées par a, b, c, d; et soient représentés chacun des angles dièdres par son arête, qui est en même temps l'une des arêtes du tétraèdre, de sorte que AB représentera

l'angle dièdre qui est entre les faces c et d; AC l'angle entre d et b, etc.; on a les quatre équations

$$a = b \cos CD + c \cos DB + d \cos BC,$$
$$b = c \cos DA + d \cos AC + a \cos CD,$$
$$c = d \cos AB + a \cos BD + b \cos DA,$$
$$d = a \cos BC + b \cos CA + c \cos AB.$$

Or on peut déduire de ces équations des résultats analogues à ceux que procurent les trois équations du triangle.

Premièrement. — Si l'on élimine les trois angles adjacents à une même face, on obtient, pour le carré de cette face, la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2cd \cos AB - 2db \cos AC - 2bc \cos AD,$$

ce qui correspond à la formule pour le côté du triangle en fonction des deux autres côtés et de l'angle qu'ils comprennent.

Deuxièmement. — Les quatre équations du tétraèdre étant homogènes et du premier degré par rapport aux faces, on peut éliminer celles-ci; et, par le simple développement d'un déterminant symétrique, on obtient la relation qui existe entre les six angles dièdres d'un tétraèdre, relation donnée autrefois dans les *Nouvelles Annales* (1846, p. 374), d'après un article de M. L. Clausen, inséré en 1832 dans le *Journal de Crelle* (t. VIII, p. 138); mais déjà, antérieurement, ainsi que l'a fait remarquer M. Terquem, cette relation avait été donnée dans les *Annales de Gergonne* (t. VI, p. 253, 1815-1816), par Bérard, alors professeur au lycée de Besançon (*).

Troisièmement. — Chaque face du tétraèdre est proportionnelle à une certaine fonction des éléments de

(*) La même relation est donnée sous forme d'un déterminant, et comme cas particulier d'une relation polyédrométrique très-générale, par M. le Dr Baltzer (*Théorie des déterminants*, trad. Hoüel, p. 217).



l'angle trièdre qui lui est opposé, ce qui constitue une belle analogie avec cette propriété du triangle, que les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

Voici ce qu'il en est : j'appellerai PA la demi-somme des angles dièdres qui composent l'angle trièdre A, de sorte qu'on aura

$$2PA = AB + AC + AD.$$

Cela posé, la formule

$$\sqrt{\cos PA \cos(PA - AB)\cos(PA - AC)\cos(PA - AD)},$$

impliquant exclusivement les éléments du trièdre A, on peut, sans ambiguïté, la désigner par le symbole $\varphi(A)$, et l'on voit ce que seront respectivement $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$. Or une combinaison convenable des quatre équations du tétraèdre conduit aux égalités suivantes :

$$\frac{a}{\varphi(A)} = \frac{b}{\varphi(B)} = \frac{c}{\varphi(C)} = \frac{d}{\varphi(D)}.$$

THÉORÈME D'ARITHMOLOGIE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

---

1. Théorème. — *Les nombres* A, B, α, β, *étant des entiers supérieurs à zéro, si la somme*

$$A^\alpha + B^\beta$$

est un nombre premier, le plus grand commun diviseur des nombres α *et* β *est l'unité ou une puissance de* 2.

En effet, s'il n'en était point ainsi, ce plus grand commun diviseur admettrait un facteur impair k, supérieur à l'unité ; on aurait

$$\alpha = k\alpha',$$
$$\beta = k\beta'.$$

La somme considérée pourrait s'écrire

$$(A^{\alpha'})^k + (B^{\beta'})^k;$$

sous cette forme, on voit immédiatement qu'elle serait divisible par

$$A^{\alpha'} + B^{\beta'};$$

elle ne pourrait donc être un nombre premier.

2. Corollaire. — *Si la somme*

$$A^{\alpha} + 1$$

est un nombre premier, α est égal à l'unité ou à une puissance de 2.

En effet, cette nouvelle somme peut s'écrire

$$A^{\alpha} + 1^{\alpha},$$

et α est alors le plus grand commun diviseur considéré dans le théorème précédent.

3. *Remarque.* — Ce corollaire est connu depuis longtemps; mais le théorème qui précède me semble nouveau.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. A. de Saint-Germain à M. Gerono, rédacteur des Nouvelles Annales.

Monsieur,

Il est peut-être utile d'indiquer quelques réserves à faire au sujet de questions résolues dans le numéro d'octobre dernier.

Sur la question 56, M. Brocard dit : Considérons une droite intérieure à un cône et partant de son sommet;

il est évident que tout plan perpendiculaire à cette droite rencontrera les génératrices du cône, et les droites du système qui leur sont parallèles. Rien n'est moins évident; car soit un cône droit dont l'angle au sommet soit de 120 degrés; tout plan dont l'axe forme avec l'axe du cône un angle compris entre 30 et 60 degrés sera parallèle à deux génératrices et, par suite, à deux droites du système, à moins que celles-ci ne se rencontrent et que le plan ne les contienne toutes deux. D'ailleurs, le théorème énoncé n'est pas vrai sans restriction; que le système donné comprenne les génératrices de deux paraboloïdes, il n'y a pas de plan qui ne soit parallèle à deux droites au moins.

Sur la question 1031, la relation segmentaire indiquée pour que les plus courtes distances des côtés opposés d'un quadrilatère gauche se coupent est bien exacte; mais, comme elle est vérifiée pour tous les couples de droites EF, GH, qui se rencontrent, on désirait peut-être une condition plus spéciale aux perpendiculaires communes. Ainsi, en menant par un point des parallèles aux quatre côtés et des normales aux plans déterminés par les parallèles à chaque couple de côtés opposés, ces six droites doivent être sur un cône du second degré. Cette condition est intéressante, en ce que les longueurs des côtés n'y interviennent pas; mais il y en a sans doute d'autres plus élémentaires et plus remarquables.

A propos de rectification, je dois m'excuser moi-même au sujet de la dernière phrase d'un petit article paru en août dernier; je dis (p. 357) : que le centre de l'ellipse est le pôle de la droite $P = 0\ldots$; en réalité, il est le pôle, par rapport à chaque couple de tangentes, de la droite qui va de leur point de rencontre à l'intersection de la troisième tangente et de la droite $P = 0$. J'avais, du reste, prié M. Brisse de faire supprimer cette der-

nière phrase, et, s'il l'a oublié, c'est que la chose était de très-minime importance.

Vous trouverez peut-être, Monsieur le rédacteur, qu'il serait utile de rapprocher ces observations des articles auxquels elles se rapportent; je vous en laisse juge.

Extrait d'une Lettre de M. Gambey. — Ma solution de la question 1067 est erronée, parce que j'ai négligé, dans l'expression de l'aire de l'ellipse, l'influence du terme constant de l'équation réduite.

En dérivant, par rapport à h, l'expression du produit des axes, on arrive à une équation du troisième degré qui donne, dans le cas particulier où les segments λ, λ', μ, μ' ont les valeurs 1, 2, 2 et 3, les racines

$$h' = 3,$$
$$h'' = 6 - \sqrt{6},$$
$$h''' = 6 + \sqrt{6};$$

mais, comme on doit avoir $h < \sqrt{12}$, il faut prendre la racine 3.

J'ai calculé les valeurs de l'aire pour les valeurs 0, 1, 2, 3, 3,1 de h, et j'ai trouvé qu'elle est proportionnelle aux fractions suivantes :

$$\frac{49}{27},\quad \frac{900}{1331},\quad \frac{9}{32},\quad \frac{4}{27},\quad \frac{2073600}{13651919},$$

formant une suite décroissante jusqu'à l'avant-dernière inclusivement, de sorte que le minimum de l'aire est donné par la valeur $h = 3$. Il est, du reste, évident que l'aire augmente quand h décroît au-dessous de zéro.

Voici l'équation du troisième degré en question

$$\begin{aligned}4h^3 - 4(\lambda+\lambda')(\mu+\mu')h^2 \\ + [3\mu\mu'(\lambda+\lambda')^2 + 3\lambda\lambda'(\mu+\mu')^2 - 4\lambda\lambda'\mu\mu']h \\ - 2\lambda\lambda'\mu\mu'(\lambda+\lambda')(\mu+\mu') = 0.\end{aligned}$$

Note du Rédacteur. — M. Bourguet, en m'informant, de même, de l'erreur qui s'est glissée dans la solution de la question 1067, m'a de plus adressé une autre solution de la question dont il s'agit; elle sera prochainement publiée.

Lettre à M. Ad. Quetelet, sur diverses questions de Mathématiques, par M. Genocchi, professeur à l'Université de Turin (*).

Nous transcrivons ici, en entier, la dernière page de ce remarquable écrit :

« Je ne parlerai point de la Géométrie à n dimensions; ce n'est que de l'Analyse, sous des noms empruntés à la Géométrie. Cette étude remonte aux *lieux analytiques* de Cauchy, qui, du moins, ne cherchait pas à cacher sa pensée et à donner le change par des dénominations absurdes (voir *Comptes rendus*, 1847, t. XXIV, p. 885). Au moyen de ces espaces, dont nous ne pouvons avoir aucune idée, et aussi, peut-être, au moyen de la considération des points et des lignes à distance *infinie*, ou *imaginaires*, dont je crains que les modernes n'aient un peu *abusé*, on dépouille la Géométrie de ce qui forme son meilleur avantage et son charme particulier, de la propriété de donner une représentation sensible aux résultats de l'Analyse, et l'on remplace cette qualité par le défaut contraire, puisque des résultats qui n'auraient rien de choquant, sous leur forme analytique, n'offrent plus de prise à l'esprit ou paraissent *absurdes* lorsqu'on les exprime par une nomenclature géométrique, supposant des points, des lignes ou des espaces qui n'ont aucune existence réelle, et dont l'admission répugne au bon sens ou dépasse l'intelligence. »

(*) Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XXXVI, n° 8; août 1873.

BIBLIOGRAPHIE.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni,* socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tome V.

Septembre 1872. — Storia delle matematiche presso gli Arabi del D[r] *Ermanno Hankel,* professore di matematiche nell' Università di Tübingen. Traduzione dal tedesco del sig. *Filippo Keller.*

Dieci Lettere inedite di *Giuseppo Luigi Lagrange* ad *Antonio Maria Lorgna.*

Intorno a nove Lettere in lingua italiana di *Giuseppo Luigi Lagrange.* — *B. Boncompagni.*

Octobre. — Storia delle matematiche presso gli Arabi del D[r] *Ermanno Hankel,* professore di matematiche nell' Università di Tübingen. Traduzione dal tedesco del signor *Filippo Keller* (fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Novembre. — Vite di matematici arabi tratte da un' opera inedita di *Bernardino Baldi,* con note di M. *Steinschneider.*

Décembre. — Vite di matematici arabi tratte da un' opera inedita di *Bernardino Baldi,* con note di M. *Steinschneider* (fine).

Intorno ad una Lettera del sig. conte *L.-F. Menabrea.* Appunti di *Angelo Genocchi.* Sulle Scienze occulte nel medio evo e sopra un codice della famiglia speciale, Discorso letto all' Acca-

demia di Scienze e Lettere in Palermo dal Soc. *Isidoro Carini*, socio collaboratore della medesima. Palermo, stamperia Perino, 1872. — *B. Boncompagni.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Tome VI.

Janvier 1873. — Appunti storici intorno alle ricerche sui piccoli e spontanei moti dei pendoli, fatte dal secolo XVII in poi; del *P.-D. Timoteo Bertelli, Barnabita.*

Intorno ad alcune note di *Galileo Galilei* ad un' opera di *Giovanni Battista Morin.* — *B. Boncompagni.*

Note per il *Morino* di *Galileo Galilei.*

Février. — Sulla prima idea delle caldaie tubulari. Lettera dell' ing^re conte *Guido Vimercati* à *D.-B. Boncompagni.*

Quelques remarques sur deux articles du *Bullettino* (t. V, p. 343 à 401; septembre à octobre 1872, p. 427 à 542; novembre à décembre 1872) intitulés : « Storia delle matematiche presso gli Arabi, del Dr *Ermanno Hankel*, ecc. » et « Vite di matematici arabi, etc., con note di M. *Steinschneider* ». *B. Bouchon Brandely.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Mars. — Intorno a dieci Lettere inedite di *Giuseppo Luigi Lagrange.* Nota dell' ing^re *Giam Battista Biadego.*

QUESTIONS.

1119. Parmi les triangles rectangles, on sait qu'il en est une infinité dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers. De même, parmi tous les triangles ayant un même angle dont le cosinus et le sinus sont supposés commensurables, il en est une infinité dont les côtés sont en nombres entiers.

Parmi les tétraèdres dont un des angles solides est trirectangle, il n'en est aucun dont toutes les arêtes soient

mesurées par des nombres entiers; mais il en est une infinité dont les quatre faces ont leurs aires mesurées par de tels nombres. (ABEL TRANSON.)

1120. Construire géométriquement une hyperbole équilatère connaissant le centre, une tangente et un point.
(A. DE SAINT-GERMAIN.)

1121. Trouver le lieu des foyers des coniques ayant une extrémité de l'axe focal en un point donné, et touchant une droite en un autre point donné.
(A. DE SAINT-GERMAIN.)

1122. Le lieu des sommets des paraboloïdes hyperboliques passant par deux droites non dans un même plan est un conoïde droit; chercher ses sections par des plans parallèles à son axe. (A. DE SAINT-GERMAIN.)

1123. Les conditions pour que l'hyperboloïde

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0$$

soit de révolution sont, λ, μ, ν étant les angles des axes et $a, b, c > 0$,

$$\frac{a}{1 - \cos\lambda} = \frac{b}{1 - \cos\mu} = \frac{c}{1 - \cos\nu}.$$

On propose d'interpréter géométriquement ces relations.
(A. DE SAINT-GERMAIN.)

ERRATA DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 102, log 58244 : *au lieu de* 4,7651512, *lisez* 4,7652512.

Cette faute typographique a été signalée par M. Victor Pluzanski.

sidérée aujourd'hui comme le meilleur Traité réellement classique; malheureusement, il est fort incomplet.

N'était-ce pas rendre service à bon nombre de personnes que de faire paraître un Traité très-élémentaire dans ses principes, mais cependant assez complet pour permettre de lire tout ce qui a été écrit sur la matière? C'est cette pensée qui a inspiré la publication du présent Ouvrage, qui peut être considéré comme une véritable introduction au Traité de Laplace, quoiqu'il forme à lui seul un corps assez étendu pour embrasser toute la science des hasards

---

TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

(Deuxième Série.) — Novembre 1873.

Messieurs les Souscripteurs qui désirent ne point éprouver de retard dans la réception du cahier de Janvier 1874 sont priés de *renouveler immédiatement* leur abonnement.

TABLE DES MATIÈRES.

Novembre 1873.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

(Deuxième Série.) — Décembre 1873.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

DÉCEMBRE 1873.

**S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, rue d'Enfer, 23,
ou à M. BRISSE, rue de Rennes, 89.**
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

Messieurs les Souscripteurs qui désirent ne point éprouver de retard dans la réception du cahier de Janvier 1874 sont priés de *renouveler immédiatement* leur abonnement.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ PAR
M. GERONO,
Professeur de Mathématiques,
ET
M. Ch. BRISSE,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1874 est en cours de publication.

On ne peut s'abonner que pour l'année entière.

L'abonnement est augmenté de 3 francs à partir de l'année 1869, et les prix pour les divers pays se trouvent dorénavant fixés ainsi qu'il suit :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Égypte, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Portugal, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvège, Suède	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861), au lieu de 240 francs, 200 francs payables de la manière suivante : 100 francs comptant, et les 100 francs restants en un bon à trois mois à l'ordre de M. Gauthier-Villars, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes.

Les tomes X et XVI à XX (1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.

Les autres tomes de la première série se vendent séparément ...... 12 fr.

La **DEUXIÈME SÉRIE**, commencée en 1862, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les tomes I à V (1862 à 1866) ne se vendent pas séparément.

Les tomes suivants de la deuxième série se vendent séparément .... 15 fr.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 501);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

110. PROBLÈME. — *Déterminer le barycentre* F *du périmètre d'un triangle.*

Le barycentre du côté AB est en son point milieu C^0; par suite, la somme géométrique de toutes les droites joignant un point quelconque F à tous les éléments infiniment petits de ce côté, éléments dont le nombre est proportionnel à la longueur c, sera

$$c\,\mathrm{FC}^0 \triangleq \frac{c}{2}(\mathrm{FA}+\mathrm{FB}).$$

On peut en dire autant pour les deux autres côtés $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$; et, pour que F soit le barycentre de l'ensemble de ces trois côtés, on devra avoir (99)

$$(9)\qquad (b+c)\mathrm{FA}+(c+a)\mathrm{FB}+(a+b)\mathrm{FC}\triangleq 0.$$

Pour rendre tout à fait directe et facile la manière d'employer cette équipollence, il convient (au moyen de la règle I) de rapporter tous les points à un point arbitraire O; alors l'équipollence (9) devient

$$2(a+b+c)\mathrm{OF}\triangleq(b+c)\mathrm{OA}+(c+a)\mathrm{OB}+(a+b)\mathrm{OC}.$$

La formule (5) du n° 108, en raison de la proportionnalité des côtés a, b, c aux sinus des angles opposés, devient

$$(a+b+c)\mathrm{OP}\triangleq a\mathrm{OA}+b\mathrm{OB}+c\mathrm{OC}.$$

Par suite,

$$2OF + OP \hat{=} OA + OB + OC \hat{=} 3OG,$$

G étant le barycentre des trois points A, B, C. Changeant O en F, on a

$$(10) \qquad FP \hat{=} 3FG,$$

relation qui, combinée avec la formule (3) du n° 104, $RH \hat{=} 3RG$, donne aussi

$$(11) \qquad HP \hat{=} 2FR.$$

Par suite, *dans tout triangle, le barycentre* G *est au tiers de la droite qui va du barycentre* F *du périmètre au centre* P *du cercle inscrit, et la droite menée entre l'intersection* H *des trois hauteurs et le centre du cercle inscrit est équipollente au double de celle menée entre le barycentre du périmètre et le centre* R *du cercle circonscrit.*

111. On pourrait aussi démontrer que F est le point milieu de la droite joignant H au centre du cercle qui passe par les centres P_1, P_2, P_3 des cercles exinscrits au triangle ABC. Les relations (3), (4), (10), entre les points R, H, G, O, P, F, permettent de les déterminer lorsqu'on en connaît trois seulement, indépendants entre eux.

112. Des relations analogues existent par rapport aux barycentres F_1, F_2, F_3 des trois côtés du triangle, lorsqu'on affecte les éléments infiniment petits de l'un des côtés d'un coefficient négatif. Comme au n° 106, on trouve que la figure $FF_1F_2F_3$ est semblable à la figure $PP_1P_2P_3$; les côtés de la première sont les moitiés de ceux de la seconde.

Exercices sur les aires polygonales.

113. Problème. — *Exprimer le produit des aires de deux polygones au moyen des distances entre les sommets de l'un et ceux de l'autre.*

Dans le cas de deux triangles ABC, LMN, la règle XII (57) nous donne le produit cherché au moyen d'une équipollence que l'on pourrait bien construire, mais qu'il ne serait pas facile de calculer, parce que les termes représentent des droites non parallèles; fort heureusement, elle peut se résoudre en quatre de ces binômes que nous avons vus (96) être réductibles à des termes, tous d'inclinaison nulle. L'équipollence se convertit de la sorte en l'équation désirée. Voici le calcul :

$$
\begin{aligned}
16\,\mathrm{ABC.LMN} \triangleq & -(\mathrm{AB\,cj.AC} - \mathrm{cj.AB.AC}) \\
& \quad \times (\mathrm{LM\,cj.LN} - \mathrm{cj.LM.LN}) \\
\triangleq\ & \mathrm{AB\,cj.AC\,cj.LM.LN} + \mathrm{cj.AB.AC.LM\,cj.LN} \\
& - \mathrm{AB\,cj.AC.LM\,cj.LN} - \mathrm{cj.AB.AC\,cj.LM.LN} \\
\triangleq\ & (\mathrm{AB\,cj.LM} + \mathrm{cj.AB.LM}) \\
& \quad \times (\mathrm{AC\,cj.LN} + \mathrm{cj.AC.LN}) \\
& -(\mathrm{AB\,cj.LN} + \mathrm{cj.AB.LN}) \\
& \quad \times (\mathrm{AC\,cj.LM} + \mathrm{cj.AC.LM}) \\
\triangleq\ & (\mathrm{gr^2AM} + \mathrm{gr^2BL} - \mathrm{gr^2AL} - \mathrm{gr^2BM}) \\
& \quad \times (\mathrm{gr^2AN} + \mathrm{gr^2CL} - \mathrm{gr^2AL} - \mathrm{gr^2CN}) \\
& - (\mathrm{gr^2AN} + \mathrm{gr^2BL} - \mathrm{gr^2AL} - \mathrm{gr^2BN}) \\
& \quad \times (\mathrm{gr^2AM} + \mathrm{gr^2CL} - \mathrm{gr^2AL} - \mathrm{gr^2CM}).
\end{aligned}
$$

Dans le développement du dernier membre, les termes dépendant des côtés AB, LM se réduisent aux deux seuls

$$\mathrm{gr^2AL\,gr^2BM} - \mathrm{gr^2AM\,gr^2BL},$$

et un binôme analogue s'obtient pour chaque combi-

naison d'un côté du triangle ABC avec un côté du triangle LMN, étant bien entendu que les côtés, dans les deux triangles, doivent être pris dans le même sens.

Le produit des aires des deux triangles est ainsi donné par un polynôme de dix-huit termes, qui peut s'exprimer symboliquement comme il suit :

$$(1) \quad 16\,ABC.LMN = (AB + BC + CA)(LM + MN + NL),$$

pourvu que, dans le développement du second membre, on substitue à chaque produit AB.LM le binôme

$$(AL.BM)^2 - (AM.BL)^2.$$

114. Si au triangle ABC est adossé un autre triangle ACD, de sorte qu'ils forment ensemble le quadrilatère ABCD, on aura la valeur de 16ABCD.LMN, en ajoutant au premier facteur du second membre de (1) les termes AC + CD + DA. Or les binômes qui résultent du terme AC, et qui sont, par exemple, $(AL.CM)^2 - (AM.CL)^2$, détruisent évidemment ceux résultant de CA, et qui sont $(CL.AM)^2 - (CM.AL)^2, \ldots$; donc, en admettant la convention précédente (113), nous aurons

$$16\,ABCD.LMN = (AB + BC + CD + DA)(LM + MN + NL).$$

Par le même raisonnement, nous pourrions étendre la formule au produit de deux polygones, et le problème serait ainsi résolu; il resterait à combiner chaque côté de l'un des polygones avec chaque côté de l'autre, et à calculer, pour chaque combinaison, l'un des binômes ci-dessus.

115. Ce théorème, de même que son analogue relatif au produit de deux polyèdres, a été publié par moi, avec divers autres, dans les *Annales des Sciences du royaume lombard-vénitien*, t. IV, p. 256, 1834, et t. VIII, p. 96,

§ 108, 1838. Il a été reproduit depuis lors dans le *Journal für die Mathematik*, Bd. XXIV, § 252, 1842, et aussi dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. On l'a attribué à Staudt.

116. Si R est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, la formule symbolique (1) se réduit à

$$16\,ABC.RMN \doteq (AB + BC + CA)(MN),$$

parce que les termes exprimés symboliquement par $(AB + BC + CA)(RM + NR)$ sont tous multipliés par une des quantités égales $(AR)^2 = (BR)^2 = (CR)^2$, et se détruisent réciproquement.

Si R_1 est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD, la somme

$$16\,ABC.RMN + 16\,ACD.R_1MN$$

sera exprimée (114) par

$$(AB + BC + CD + DA)(MN),$$

expression qui dépend des côtés et non des diagonales du polygone ABCD; par conséquent, si ce polygone avait été divisé d'une autre manière en triangles, cela n'aurait pas changé la valeur de la somme des produits de chaque triangle par le triangle ayant pour sommet le centre du cercle circonscrit à ce triangle, et pour base une droite MN choisie arbitrairement.

Il résulte de là et d'une propriété connue des barycentres, pouvant facilement se déduire de la définition qu'on en a donnée (99), que :

Pour tout polygone ou assemblage de polygones (situés dans un même plan), il existe un point qui est le barycentre de masses proportionnelles aux aires des triangles distincts en lesquels le polygone peut être

divisé, ces masses étant situées aux centres des cercles circonscrits à ces triangles, au lieu de l'être aux barycentres de ceux-ci.

A ce point remarquable, qui n'a été, à ma connaissance, observé par personne, j'ai donné le nom de *pseudocentre.*

117. Supposons, par exemple, qu'un triangle ABC soit divisé en trois triangles GBC, GCA, GAB, dont les aires soient α, β, γ, d'où résulte que l'on a (100)

$$\alpha \mathrm{GA} + \beta \mathrm{GB} + \gamma \mathrm{GC} \triangleq 0;$$

le pseudo-centre du triangle ABC, c'est-à-dire le centre R de son cercle circonscrit, sera aussi le pseudo-centre de l'ensemble des trois triangles, c'est-à-dire sera le barycentre des centres R_1, R_2, R_3 des cercles circonscrits à GBC, GCA, GAB, affectés des coefficients numériques, ou masses, α, β, γ; cela revient à dire qu'on aura

$$\alpha \mathrm{RR}_1 + \beta \mathrm{RR}_2 + \gamma \mathrm{RR}_3 \triangleq 0.$$

En particulier, si G est le barycentre du triangle ABC, R sera celui du triangle $R_1 R_2 R_3$.

118. Nous pourrons appeler *multilatéral* un système de droites MN, PQ,... dont la somme géométrique est nulle, et qui, par conséquent, sont équipollentes aux côtés d'un polygone fermé. La somme des triangles OMN, OPQ,..., qui ont un sommet commun O et pour bases les côtés d'un multilatéral, sera exprimée, d'après la règle XII, par

$$\frac{\sqrt{}}{4}(\mathrm{OM\,cj.MN} + \mathrm{OP\,cj.PQ} + \ldots - \mathrm{cj.OM.MN} - \mathrm{cj.OP.PQ} - \ldots).$$

Pareillement, pour un autre point O_1, nous aurons

$$\frac{\sqrt{}}{4}(\mathrm{O_1M\,cj.MN} + \mathrm{O_1P\,cj.PQ} + \ldots - \mathrm{cj.O_1M.MN} - \mathrm{cj.O_1P.PQ} - \ldots).$$

La différence de ces deux expressions est

$$\frac{\sqrt{}}{4}[OO_1(cj.MN + cj.PQ + \ldots) - cj.OO_1(MN + PQ + \ldots)],$$

valeur qui est nulle, puisque

$$MN + PQ + \ldots \triangleq o.$$

Donc :

Théorème. — *La somme des aires des triangles qui ont pour bases les côtés d'un multilatéral* MN, PQ,... *et un sommet commun est constante, quel que soit ce sommet; elle est dite* aire du multilatéral.

Le plus simple multilatéral est celui formé de deux droites parallèles égales et directement opposées, c'est-à-dire telles que

$$MN + PQ \triangleq o.$$

Son aire est la moitié de celle du parallélogramme MNPQ.

119. Théorème. — *Le produit des aires d'un polygone* ABCD *et d'un multilatéral* MN, PQ,... *est exprimé symboliquement, selon la convention du n°* 113, *par*

$$\frac{1}{16}(AB + BC + CD + DA)(MN + PQ + \ldots).$$

On le démontre en prenant pour aire du multilatéral la somme des triangles RMN, RPQ,... ayant pour sommet commun le pseudo-centre R du polygone ABCD.

120. Étant données plusieurs droites MN, PQ,..., l'on veut déterminer une droite XY telle que le multilatéral MN, PQ,..., XY ait une aire nulle, on devra tout d'abord choisir la grandeur et la direction de la droite RS, de telle sorte que l'on ait

$$MN + PQ + \ldots + RS \triangleq o,$$

d'où résulte

$$XY \triangleq RS;$$

puis l'autre condition

$$OMN + OPQ + \ldots + OXY = o$$

sera satisfaite, si l'on détermine le point X de manière que l'on ait

$$OM\,\mathrm{cj}.MN + OP\,\mathrm{cj}.PQ + \ldots + OX\,\mathrm{cj}.RS \triangleq o.$$

Le point X étant déterminé de cette manière, si l'on considère qu'un multilatéral d'aire nulle peut représenter un système de forces en équilibre (*), on voit que, *si les forces* MN, PQ,... *tournent d'un même angle autour de leurs points d'application* M, P,..., *leur résultante* YX *tourne elle-même d'un angle égal autour d'un point* X.

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 120.

Quelques propriétés des barycentres.

1. *Si* MN, PQ,... *est un multilatéral, le barycentre* G *des points* M, P,... *est le même que celui* G' *des points* N, Q,....

En effet, on a

$$MN + PQ + \ldots \triangleq o,$$

ou

$$ON - OM + OQ - OP + \ldots \triangleq o,$$

$$ON + OQ + \ldots \triangleq OM + OP + \ldots,$$

c'est-à-dire, en appelant n le nombre des côtés,

$$n\,OG' \triangleq n\,OG;$$

d'où

$$OG' \triangleq OG.$$

Si LL', MM', NN' sont des droites égales et parallèles aux côtés BC,

(*) Il est facile, en effet, de voir que, si l'aire est nulle, la somme des moments est nulle par rapport à un point quelconque, de sorte que toutes les conditions d'équilibre sont remplies.

(*Note du Traducteur.*)

CA, AB d'un triangle, les deux triangles LMN, L′M′N′ auront même barycentre; c'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

2. *Soient* ABC *un triangle,* O *un point quelconque. Si l'on mène* $LL' \triangleq AO$, $MM' \triangleq BO$, $NN' \triangleq CO$, *et qu'on appelle* G *le barycentre du triangle* ABC, G_1 *celui du triangle* LMN, G'_1 *celui du triangle* L′M′N′, *la figure* $OGG_1G'_1$ *sera un parallélogramme.*

On a effectivement

$$LO - L'O \triangleq AO,$$
$$MO - M'O \triangleq BO,$$
$$NO - N'O \triangleq CO,$$

et, par addition,

$$3\,G_1O - 3\,G'_1O \triangleq 3\,GO,$$
$$G_1G'_1 \triangleq GO.$$

Il est aisé d'étendre ce théorème à un système d'un nombre de points quelconque, et même de l'établir dans l'espace, ainsi que le précédent.

Si $LL' \triangleq n\,AO, \ldots$, on aura $G_1G'_1 = n\,GO$. Si le point arbitraire O coïncide avec le barycentre G, les deux points G_1, G'_1 coïncideront. Il est aisé de voir qu'alors les droites LL′, MM′, NN′ forment un multilatéral de trois côtés, correspondant à un triangle semblable à ABC.

3. *Soient* ABC *un triangle,* O *un point quelconque,* G *le barycentre; on mène* AA′, BB′, CC′, *perpendiculaires et respectivement égales à* AO, BO, CO. *Si l'on appelle* G′ *le barycentre du triangle* A′B′C′, *les trois points* O, G, G′ *formeront un triangle rectangle isoscèle.*

On aura, en effet,

$$AO - A'O \triangleq \surd AO,$$
$$BO - B'O \triangleq \surd BO,$$
$$CO - C'O \triangleq \surd CO,$$

et, par addition,

$$3\,GO - 3\,G'O \triangleq 3\surd GO,$$
$$GG' \triangleq \surd GO.$$

Si les angles A′AO,... étaient égaux à un angle α au lieu d'être droits, le triangle G′GO serait encore isoscèle, mais l'angle G serait égal à α; et, en général :

Si l'on forme les triangles OAA′, OBB′, OCC′ *semblables entre eux, le triangle* OGG′ *sera semblable à chacun des précédents.*

4. La propriété du n° 2 peut recevoir encore une extension assez intéressante :

Soient

A, B, C,... *un système de points de barycentre* G;

A′, B′, C′,... *un système de points* (*en même nombre*) *de barycentre* G′;

LL′, MM′, NN′,... *une série de droites respectivement équipollentes à* AA′, BB′, CC′,...;

G_1 *le barycentre du système des points* L, M, N,...;

G'_1 *le barycentre du système des points* L′, M′, N′,....

La figure $GG'G'_1G_1$ *sera un parallélogramme.*

Car LL′ ≏ AA′ peut s'écrire

$$LO - L'O ≏ AO - A'O.$$

De même

$$MO - M'O ≏ BO - B'O,$$
$$NO - N'O ≏ CO - C'O,$$
....

Ajoutant

$$nG_1O - nG'_1O ≏ nGO - nG'O,$$
$$G_1G'_1 ≏ GG'.$$

5. *Soient*

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ *un système de n points sur un plan;*

G *le barycentre de tous ces points;*

G_p *celui de ces points, moins le point* A_p.

La figure $G_1G_2\ldots G_n$ *est homothétique à* $A_1A_2\ldots A_n$; *le centre de similitude est* G, *et le rapport de similitude* $\frac{1}{n-1}$.

On a

$$A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_nA_1 ≏ A_2A_1,$$

ou

$$(A_3O + A_4O + \ldots + A_nO) - (A_2O + A_3O + \ldots + A_1O) ≏ A_2A_1.$$

Ajoutant A_1O aux deux membres,

$$nGO - (n-1)G_2O ≏ A_2O,$$
$$GO + (n-1)GG_2 ≏ A_2O,$$
$$GG_2 ≏ \frac{A_2G}{n-1}.$$

Exercices sur quelques questions de Géométrie supérieure.

121. Nous avons vu, au n° 29, que

$$AB.CD + AD.BC ≏ AC.BD,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{AB.CD}{AD.CB} + \frac{AC.BD}{AD.BC} ≏ 1.$$

Les doubles rapports qui forment les deux termes du premier membre de cette équipollence sont appelés par M. Chasles *rapports anharmoniques,* pourvu que, en outre, les quatre points A, B, C, D soient en ligne droite; mais, d'après le principe général (24) qui s'applique à la méthode des équipollences, toute propriété de points en ligne droite s'étend aux points d'un plan. Nous présenterons quelques exemples se rapportant à cette théorie.

122. Je démontrerai tout d'abord une formule très-facile à retenir de mémoire, laquelle comprend, comme cas particuliers, un grand nombre d'autres données par Mœbius, Chasles, etc. On propose d'exprimer un double rapport $\frac{DE.FG}{DG.FE}$ au moyen des doubles rapports $\frac{AB.CD}{CB.AD}$, $\frac{AB.CE}{CB.AE}$, $\frac{AB.CF}{CB.AF}$, $\frac{AB.CG}{CB.AG}$, dans lesquels les quatre points du premier sont rapportés à trois points constants A, B, C. Nous représenterons par d, e, f, g ces derniers doubles rapports.

On remarquera que nous ne suivons pas ici la convention, toujours adoptée par nous jusqu'à présent, consistant à indiquer par les lettres d,... des rapports numériques; tout au contraire, chacune de ces lettres pourra exprimer un nombre multiplié par une puissance quelconque du ramun.

Au moyen du théorème déjà cité (29), on a

$$-AC.DE \doteq AE.CD - AD.CE,$$
$$-AC.FG \doteq AG.CF - AF.CG,$$
$$-AC.DG \doteq AG.CD - AD.CG,$$
$$-AC.FE \doteq AE.CF - AF.CE.$$

Substituant ces valeurs dans le double rapport $\frac{DE.FG}{DG.FE}$,

celui-ci devient

$$\frac{(\mathrm{AE.CD}-\mathrm{AD.CE})(\mathrm{AG.CF}-\mathrm{AF.CG})}{(\mathrm{AG.CD}-\mathrm{AD.CG})(\mathrm{AE.CF}-\mathrm{AF.CE})},$$

que l'on reconnaît facilement comme identique à

$$\frac{(d-e)(f-g)}{(d-g)(f-e)}.$$

La même démonstration peut s'étendre à des rapports plus compliqués, de forme analogue au précédent, et que nous appellerons *rapports multiples*. Donc :

Connaissant tous les doubles rapports $\frac{\mathrm{AB.CD}}{\mathrm{CB.AD}} \triangleq d, \ldots,$ *tout autre rapport multiple sera déterminé par une formule analogue à*

$$\frac{\mathrm{DE.FG.MN}}{\mathrm{DN.MG.FE}} \triangleq \frac{(d-e)(f-g)(m-n)}{(d-n)(m-g)(f-e)}.$$

Si, dans le rapport que l'on veut exprimer au moyen des doubles rapports $d, e, f, \ldots,$ entrait quelqu'un des points A, B, C, la même formule subsisterait, pourvu qu'on fît la remarque que, évidemment, on a

$$c \triangleq \frac{\mathrm{AB.CC}}{\mathrm{CB.AC}} \triangleq 0,$$

$$b \triangleq \frac{\mathrm{AB.CB}}{\mathrm{CB.AB}} \triangleq 1,$$

$$a \triangleq \frac{\mathrm{AB.CA}}{\mathrm{CB.AA}} \triangleq \infty.$$

Ainsi, par exemple, on aura

$$\frac{\mathrm{AC.BD}}{\mathrm{BC.AD}} \triangleq \frac{b-d}{b-c} \triangleq 1-d \triangleq 1-\frac{\mathrm{AB.CD}}{\mathrm{CB.AD}},$$

$$\frac{\mathrm{AC.DE}}{\mathrm{DC.AE}} \triangleq \frac{d-e}{d},$$

$$\frac{\mathrm{AE.BD}}{\mathrm{BE.AD}} \triangleq \frac{1-d}{1-e} \triangleq \left(\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}}-\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}\right) : \left(\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}}-\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}}\right).$$

C'est la formule au moyen de laquelle M. Chasles (*Géométrie supérieure*, § 33) exprime le rapport anharmonique des points A, E, B, D au moyen d'un cinquième point C.

123. Soient pris arbitrairement les points A, B, C, D,..., et arbitrairement aussi les trois points A', B', C', que nous considérons comme correspondant aux trois premiers. On détermine les points D', E',... de manière que

$$\frac{AB.CD}{CB.AD} \triangleq \frac{A'B'.C'D'}{C'B'.A'D'}, \ldots.$$

Tout rapport multiple entre les points A, B, C, D,... sera équipollent au rapport formé par les points correspondants A', B', C', D',...; c'est une conséquence immédiate du théorème du n° 122.

124. Si au premier système de points considéré appartient un point J situé à une distance infinie, on aura, quelle que soit la direction des droites tracées vers ce point,

$$\frac{CJ}{AJ} \triangleq 1;$$

par suite,

$$(1) \qquad \frac{AB.CJ}{CB.AJ} \triangleq \frac{AB}{CB} \triangleq \frac{A'B'.C'J'}{C'B'.A'J'}.$$

Semblablement, le point I du premier système, qui correspond à tout point I' situé à une distance infinie et considéré comme appartenant au second, est donné par

$$(2) \qquad \frac{AB.CI}{CB.AI} \triangleq \frac{A'B'}{C'B'};$$

divisant l'une par l'autre ces deux équipollences, on

obtient

(3) $$IA.J'A' \triangleq IC.J'C'.$$

Tout ce que nous avons trouvé pour A, C peut se répéter pour deux autres points. Ainsi *les droites qui, de deux points* I, J′, *correspondant dans chaque système des points à l'infini de l'autre, vont aboutir à deux points correspondants, ont entre elles un produit constant en grandeur comme en direction.*

125. Les deux figures inverses étant situées sur le même plan, nous pourrons chercher le point E qui coïncide avec son propre correspondant E′. Nous emploierons, dans ce but, l'équipollence

$$IE.J'E \triangleq IA.J'A' \quad (85)$$

ou

$$IE(IE - IJ') \triangleq IA.J'A'.$$

Posant $IJ' \triangleq 2IO$, on aura

$$(IE)^2 - 2IO.IE + (IO)^2 \triangleq IA.J'A' + (IO)^2.$$

Pour extraire plus facilement la racine du second membre, nous supposerons que O′ soit, dans la seconde figure, le point qui correspond à O considéré comme appartenant à la première, si bien (124) que

$$IA.J'A' \triangleq IO.J'O'.$$

D'après cela, nous aurons

(4) $$IE - IO \triangleq \pm\sqrt{IO(IO + J'O')} \triangleq \pm\sqrt{OJ'.OO'}.$$

Donc *il y a deux points* E, F *qui, dans deux figures inverses, coïncident avec leurs propres correspondants. La droite* FOE *est bissectrice de l'angle* J′OO′, *et les droites* $OE \triangleq FO$ *sont moyennes proportionnelles entre* OJ′, OO′.

Ces conclusions sont identiques avec celles qui existent pour des points situés sur une même ligne droite (Chasles, *Géométrie supérieure,* § 154).

Si les points L, L_1 sont déterminés par l'équipollence

$$(OL)^2 \triangleq IO.J'O',$$

nous verrons plus loin que E, F sont les foyers de l'ellipse ayant pour diamètres conjugués IOJ′, LOL_1.

126. Connaissant les trois couples de points correspondants A, B, C, A′, B′, C′, les centres d'inversion I, J′ seront déterminés par les équipollences

$$(5) \quad AI \triangleq \frac{AB.AC.C'B'}{AB.C'B'-A'B'.CB}, \quad A'J' \triangleq \frac{A'B'.A'C'.CB}{A'B'.CB-AB.C'B'},$$

lesquelles deviennent plus simples si l'on connaît les points E, F se correspondant à eux-mêmes, puisque alors on a

$$(6) \qquad EI \triangleq \frac{CE.C'F}{CC'}, \quad EJ' \triangleq \frac{EC'.CF}{CC'}.$$

127. Si l'on considère les points E, F (dont chacun se correspond à lui-même), il y aura, pour tout couple de points correspondants, constance du double rapport

$$(7) \qquad \frac{EA'.FA}{EA.FA'} \triangleq -\mu.$$

On a, en effet (123),

$$\frac{EB.FA}{EA.FB} \triangleq \frac{EB'.FA'}{EA'.FB'}.$$

A l'équipollence (7), on peut donner la forme

$$\mu\frac{EA}{FA} + \frac{EA'}{FA'} \triangleq 0$$

ou

$$(8) \qquad \frac{\mu}{\mathrm{FA}} + \frac{1}{\mathrm{FA}'} \triangleq \frac{\mu + 1}{\mathrm{FE}},$$

puisque, en ajoutant la première avec la seconde multipliée par FE, on obtient une équipollence identique.

La relation (8) peut s'exprimer en disant que E est, *par rapport à l'origine* F, le *centre harmonique* des points A, A', affectés des coefficients μ, 1. Dans cet énoncé, μ doit être regardé d'une façon générale comme imaginaire. On a aussi

$$\mu \frac{\mathrm{A'F}}{\mathrm{AF}} + \frac{\mathrm{A'E}}{\mathrm{AE}} \triangleq 0$$

ou

$$(9) \qquad \frac{\mu}{\mathrm{AF}} + \frac{1}{\mathrm{AE}} \triangleq \frac{\mu + 1}{\mathrm{AA}'},$$

d'où il résulte que A' est, par rapport à l'origine A, le centre harmonique des points F, E, affectés des coefficients μ, 1.

128. L'imaginaire μ s'exprime très-facilement au moyen des centres d'inversion I, J'. Il suffit, en effet, de faire tendre vers l'infini l'un des points A, A', pour que la relation (7) donne

$$(10) \qquad -\mu \triangleq \frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{EI}} \triangleq \frac{\mathrm{EJ}'}{\mathrm{FJ}'}$$

ou

$$\mu \mathrm{J'F} + \mathrm{J'E} \triangleq 0,$$

c'est-à-dire (99) que J' est le barycentre des points F, E affectés des coefficients μ, 1.

129. Dans le cas particulier où

$$\mathrm{AB.C'B'} \triangleq \mathrm{A'B'.CB},$$

les points I, J' n'existent plus, et les deux figures, au lieu

d'être inverses, sont *semblables;* le point E ci-dessus, qui coïncide avec son propre correspondant, est seul, et se trouve déterminé par

$$\frac{AB}{AE} \bumpeq \frac{A'B'}{A'E}.$$

Nous l'avons déjà trouvé, au n° 40, désigné par la lettre I.

130. Quand deux figures inverses ont leurs centres d'inversion coïncidant en un seul point I, il nous suffit, pour le trouver, d'avoir deux couples de points correspondants A, A', B, B'. En effet, de

$$IA.IA' \bumpeq IB.IB',$$

on déduit

$$IA.AA' \bumpeq IA(AB' + AB) + AB.AB'$$

ou

$$(1) \qquad AI \bumpeq \frac{AB.AB'}{AB + A'B'}.$$

Les points E, F sont déterminés par l'équipollence

$$(2) \qquad IE \bumpeq -IF \bumpeq \sqrt{IA.IA'}.$$

Dans ce cas spécial, la valeur de μ est (128)

$$-FI:IF \bumpeq 1;$$

par suite, on a (127) le double rapport *harmonique*

$$\frac{EA'.FA}{EA.FA'} \bumpeq -1.$$

Ceci exprime que le quadrilatère EAFA', outre qu'il est inscriptible dans un cercle, a le produit de deux côtés opposés égal au produit des deux autres. Je l'appelle quadrilatère *harmonique,* parce qu'il est par rapport à un plan ce que sont par rapport à une droite deux cou-

ples de points conjugués harmoniques. Ainsi, par la construction des équipollences (1), (2), on trouve les deux points E, F, qui forment un quadrilatère harmonique, aussi bien avec A, A′ qu'avec B, B′.

131. Dans le cas ci-dessus d'un seul centre d'inversion I, si au point A de la première figure correspond le point A′ de la seconde, et que l'on considère ce point A′ comme appartenant à la première figure, il est évident qu'à ce point correspondra le point A dans la seconde figure. On aura, par suite (123),

(3) $$\frac{AB.CA'}{AA'.CB} \triangleq \frac{A'B'.CA}{A'A.C'B'}$$

ou

(4) $$\frac{AB.CA'.B'C'}{AC'.B'A'.CB} \triangleq 1.$$

En même temps que cette équipollence, et de la même manière, on en a aussi trois autres, que l'on obtient en disposant dans un autre ordre les points des trois couples A, A′, B, B′, C, C′. On a également

(5) $$\frac{AB.A'C}{AC.A'B} \triangleq \frac{A'B'.AC'}{A'C'.AB'}$$

ou

(6) $$\frac{AB.A'C.AB'.A'C'}{AC'.A'B'.AC.A'B} \triangleq 1,$$

et deux autres équipollences analogues.

Nous avons déjà parlé au n° 42 de ces relations simultanées entre six points d'un plan. En outre du point I, nous avons les deux points E, F, qui forment les trois quadrilatères harmoniques EAFA′, EBFB′, ECFC′.

132. Je pourrais étendre beaucoup plus ces applications de la méthode des équipollences; mais ce que j'ai

dit me paraît suffisant pour faire connaître les avantages qu'elle présente en comparaison de l'application ordinaire de l'Algèbre à la Géométrie. Il est d'ailleurs évident que, par cette dernière méthode, on ne traite aucune question qui ne puisse aussi être traitée avec le secours du calcul des équipollences ; par exemple, lorsqu'on rapporte un point M à deux axes coordonnés passant par l'origine O et qu'on le détermine au moyen des coordonnées x, y, c'est comme si l'on posait

$$\mathrm{OM} \triangleq x + y\varepsilon^{\alpha},$$

α étant l'angle des deux axes coordonnés.

La méthode des équipollences, outre les avantages résultant des artifices qui lui sont propres, présente aussi celui de déterminer les positions respectives des éléments d'une figure, sans donner lieu à aucune chance d'erreur, parce qu'il n'est nécessaire d'avoir aucune figure sous les yeux, et que tout s'exécute au moyen d'un algorithme connu et selon des règles fixes.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DIVERSES A LA THÉORIE DES COURBES.

Préliminaires.

133. En passant à l'étude des courbes, nous aurons encore occasion de reconnaître les avantages de notre méthode. Si nous voulons rapporter les points d'une courbe à des coordonnées orthogonales, nous pourrons poser

$$\mathrm{OM} \triangleq x + y\sqrt{}$$

et imaginer que les deux variables réelles x, y soient liées entre elles par une équation.

Mais il convient de considérer la question à un point de vue plus général ; nous traiterons ainsi en même temps et des coordonnées parallèles et des coordonnées polaires et des autres systèmes qui paraîtront s'appliquer le mieux à chaque circonstance spéciale.

Supposant que O soit un point fixe, si OM était donné par une équipollence sans aucune variable, le point M serait entièrement déterminé; mais si, dans cette équipollence entre une variable t, pouvant recevoir toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, à chaque valeur de t correspondait un point différent M, tous ces points constitueraient un lieu géométrique ou une ligne : donc l'expression générale d'une ligne droite ou courbe est

$$\text{OM} \bumpeq \Phi(t).$$

Dans la fonction Φ, entreront deux ou plusieurs droites connues de grandeur et de position, et pourra entrer aussi le ramun. Dans les cas spéciaux où la forme de la fonction est

$$\text{OM} \bumpeq x + y\sqrt{}$$

ou

$$\text{OM} \bumpeq z\varepsilon^{u},$$

en admettant que x, y ou z, u soient des fonctions réelles de t, la courbe sera rapportée aux coordonnées orthogonales ou aux coordonnées polaires.

134. Imaginant que t soit le temps, l'équipollence précédente

$$\text{OM} \bumpeq \Phi(t)$$

exprime le mouvement d'un point le long d'une courbe déterminée et suivant une loi déterminée, si bien que, par les mêmes calculs, nous étudierons en même temps

les diverses sortes de mouvements. La science du mouvement (*cinématique* d'Ampère) considérée comme un fait, sans se préoccuper des causes, tend toujours à s'associer de plus en plus à la science de l'étendue. Du reste, nous pourrons faire abstraction de cette considération, et examiner une courbe indépendamment du mouvement d'un point générateur.

135. Nous résoudrons les problèmes relatifs aux courbes en employant la forme générale

$$OM \triangleq \Phi(t),$$

sans attribuer à cette fonction une forme plutôt qu'une autre. Nous emploierons pour cet objet un calcul tout à fait semblable au calcul algébrique, sans qu'il soit aucunement nécessaire de recourir aux considérations de la Géométrie infinitésimale, ou à celles, peut-être plus rigoureuses et certainement plus pénibles, que leur ont substituées quelques mathématiciens plus *lagrangistes* que Lagrange lui-même.

Avant d'aborder les généralités, j'espère donner plus de clarté à mon exposition, en m'occupant de quelques cas particuliers.

Parabole.

136. Cherchons les propriétés de la courbe exprimée par l'équipollence

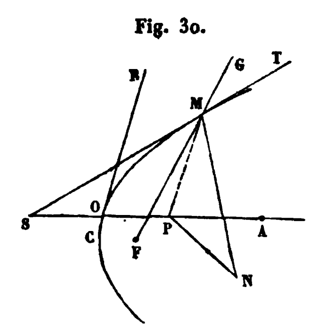
$$(1) \qquad OM \triangleq t^2 OA + t OB,$$

où OA, OB (*fig.* 30) sont deux droites déterminées non parallèles, et où t est la variable réelle.

Faisant $t = 0$, nous voyons que la courbe passe par le point O; faisant $t = \pm\infty$, on s'aperçoit que la courbe a

deux branches infinies, lesquelles tendent toujours de plus en plus à devenir parallèles à la droite OA (puisque $t = \infty$ rend tOB négligeable relativement à t^2OA). Ces

Fig. 30.



branches n'ont pas d'asymptotes, puisque toute droite parallèle à OA est coupée par l'une d'elles (*).

La courbe est appelée parabole.

137. Si le point M_1 de la courbe correspond à $t + \omega$, on a

$$MM_1 \triangleq OM_1 - OM \triangleq 2t\omega OA + \omega OB + \omega^2 OA.$$

Si ω diminue indéfiniment, MM_1 a pour limite une droite qui est dite *tangente* à la courbe. La direction de MM_1 est la même que celle de

$$MM_1 : \omega \triangleq 2tOA + OB + \omega OA$$

dont la limite, lorsque l'on fait diminuer ω indéfiniment, est

$$(2) \qquad MT \triangleq 2tOA + OB.$$

(*) En effet, si une droite parallèle à OA coupe OB en D, il suffit de prendre $t = \frac{OD}{OB}$ pour avoir l'intersection.

(*Note du Traducteur.*)

On voit ainsi qu'au point O, correspondant à $t = 0$, la courbe est tangente à OB.

138. Pour trouver le point S où la tangente MT rencontre OA, nous observerons que

$$\mathrm{OS} \bumpeq \mathrm{OM} + \mathrm{MS}$$

devra être parallèle à OA (en appelant aussi *parallèles* deux droites superposées); ce qui exprime (4) que le point S appartient à la droite OA.

Semblablement, MS devra être parallèle à la droite

$$\mathrm{MT} \bumpeq 2t\,\mathrm{OA} + \mathrm{OB};$$

donc, ayant

$$\mathrm{OM} \bumpeq t^2\,\mathrm{OA} + t\,\mathrm{OB},$$

on voit d'un coup d'œil que, pour que dans l'expression de OS n'entre pas la droite OB, on doit avoir

$$\mathrm{OS} \bumpeq \mathrm{OM} - t\,\mathrm{MT} \bumpeq - t^2\,\mathrm{OA}.$$

La droite OM est la somme géométrique de

$$\mathrm{OP} \bumpeq t^2\,\mathrm{OA}, \quad \mathrm{PM} \bumpeq t\,\mathrm{OB};$$

par suite

$$\mathrm{SO} \bumpeq \mathrm{OP}, \tag{3}$$

propriété connue de la tangente à la parabole.

139. Tirant MG, qui forme avec la tangente MT un angle égal à l'inclinaison de MT sur OA, une portion de MG sera exprimée (16) par

$$\mathrm{MG} \bumpeq g(\mathrm{MT})^2 : \mathrm{OA} - 4gt^2\,\mathrm{OA} + 4gt\,\mathrm{OB} + g(\mathrm{OB})^2 : \mathrm{OA}$$

et l'on aura

$$\mathrm{OG} \bumpeq \mathrm{OM} + \mathrm{MG}.$$

Si F est le point de la droite MG correspondant à

$g = -\frac{1}{4}$, on a

$$(4) \qquad \mathrm{OF} \triangleq -(\mathrm{OB})^2 : 4\mathrm{OA},$$

qui est indépendant de t; par suite, dans la parabole, il existe un point F (foyer), tel que chaque rayon vecteur FM forme avec la tangente en M un angle égal à l'inclinaison de cette tangente sur le diamètre OA.

140. Si un point pesant est lancé dans le vide, son mouvement se trouve exprimé par l'équipollence

$$\mathrm{OM} \triangleq t^2\mathrm{OA} + t\mathrm{OB}.$$

La vitesse correspondante d'un tel mouvement est donnée en grandeur et en direction par l'expression

$$\mathrm{MT} \triangleq 2t\mathrm{OA} + \mathrm{OB},$$

qui est la dérivée de OM par rapport au temps t. Les calculs du paragraphe précédent donnent

$$\mathrm{FM} \triangleq (\mathrm{MT})^2 : 4\mathrm{OA}.$$

Cette équipollence signifie que la vitesse d'un point pesant est proportionnelle à la racine carrée de sa distance au foyer.

141. La droite

$$(5) \qquad \mathrm{NM} \triangleq t\mathrm{OB} + (\mathrm{OB})^2 : 2\mathrm{OA}$$

fait avec la tangente

$$\mathrm{MT} \triangleq 2t\mathrm{OA} + \mathrm{OB}$$

un angle égal à celui que forme OB avec OA (16).

Ayant $\mathrm{PM} \triangleq t\mathrm{OB}$, on a aussi

$$(6) \qquad \mathrm{PN} \triangleq -(\mathrm{OB})^2 : 2\mathrm{OA} \triangleq 2\mathrm{OF},$$

c'est-à-dire que, en menant du pied P de l'ordonnée une

droite équipollente à la constante 2OF, on obtient un point de la droite MN ci-dessus. Si l'angle AOB est droit, cela nous donne la propriété connue de la sous-normale PN.

142. En changeant l'origine O, nous pouvons tout ramener au cas où l'angle AOB est droit, ce qui rend les calculs plus simples. Si, en effet, C est un point de la parabole, de telle sorte que

$$OC \triangleq c^2 OA + c OB,$$

nous aurons

$$CM \triangleq (t^2 - c^2) OA + (t - c) OB$$
$$\triangleq (t - c)^2 OA + (t - c)(2c OA + OB),$$

équipollence de même forme que

$$OM \triangleq t^2 OA + t OB,$$

ce que l'on reconnaît évidemment en changeant $t - c$ en t, et $2cOA + OB$ en CB. Il sera toujours possible de donner à c une valeur telle que $2cOA + OB$ soit perpendiculaire à OA.

Changeant t en at, nous pouvons en outre rendre égales les deux droites qui sont multipliées par t^2 et par t; et, les prenant pour unité de longueur, on peut donner à l'équipollence de la parabole la forme plus simple

$$(7) \qquad CM \triangleq t^2 + t\sqrt{}.$$

Dans ce cas, le foyer est donné par

$$CF \triangleq 1 : 4,$$

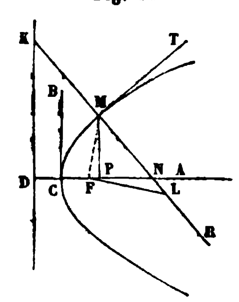
la tangente en M par

$$(8) \qquad MT \triangleq 2t + \sqrt{},$$

et la normale par

(9) $$MN \bumpeq \frac{1}{2} - t\surd \quad (\textit{fig.}\ 31).$$

Fig. 31.



143. Un point R quelconque de la normale est donné par

$$CR \bumpeq CM + 2p\,MN \bumpeq t^2 + p + (t - 2tp)\surd.$$

Pour que ce point R soit le point d'intersection de la normale MN avec celle infiniment voisine, il faut que le point R ne change pas lorsqu'on donne à t un accroissement infiniment petit ω, d'où résulte pour p un accroissement correspondant ϖ. Selon les principes du Calcul différentiel, cela s'exprime par $d\,CR \bumpeq 0$, ou

$$(2t + \surd - 2p\surd)\omega + (1 - 2t\surd)\varpi \bumpeq 0.$$

Séparant la partie multipliée par le ramun, cette équipollence donne les deux équations

$$2t\omega + \varpi = 0,$$
$$(1 - 2p)\omega - 2t\varpi = 0.$$

On en déduit

$$2p = 4t^2 + 1;$$

par suite l'équipollence

(10) $$CR \bumpeq \frac{1}{2} + 3t^2 - 4t^3\surd$$

est celle de la développée de la parabole.

144. Le rayon de courbure est donc exprimé en grandeur et en direction par

$$\mathrm{MR} \bumpeq 2t^2 + \tfrac{1}{2} - (t + 4t^3)\surd$$
$$\bumpeq (1 + 4t^2)(\tfrac{1}{2} + t\surd) \bumpeq (1 + 4t^2)\,\mathrm{MN}.$$

La droite MN, étant la somme géométrique de deux droites perpendiculaires, a pour longueur $\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4t^2}$; par suite le rayon de courbure MR est proportionnel au cube de la normale MN, terminée à l'axe de la parabole. Si $\mathrm{ML} \bumpeq \frac{1}{2}\mathrm{MR}$; c'est-à-dire si L est le milieu de MR, ayant $\mathrm{CF} \bumpeq \frac{1}{4}$, on aura

$$\mathrm{FL} \bumpeq \mathrm{CM} + \mathrm{ML} - \mathrm{CF} \bumpeq 2t^2 + (\tfrac{1}{2} - 2t^2)\,t\surd,$$

c'est-à-dire que FL est perpendiculaire à

$$\mathrm{FM} \bumpeq t^2 - \tfrac{1}{4} + t\surd.$$

Donc le rayon de courbure est double de la portion ML de la normale qui est hypoténuse du triangle MFL, rectangle au foyer F. Si l'on prend sur le prolongement du rayon RM la longueur $\mathrm{MK} \bumpeq \mathrm{LM}$, on a

$$(11) \qquad \mathrm{CK} \bumpeq -\tfrac{1}{4} + \left(\frac{3t}{2} + 2t^3\right)\surd,$$

et par suite le point K appartient à la directrice DK de la parabole.

Ellipse.

145. L'ellipse est exprimée par l'équipollence

$$(1) \qquad \mathrm{OM} \bumpeq x\,\mathrm{OA} + y\,\mathrm{OB} \quad (\textit{fig. } 32),$$

pourvu que les quantités réelles x, y satisfassent à l'équation

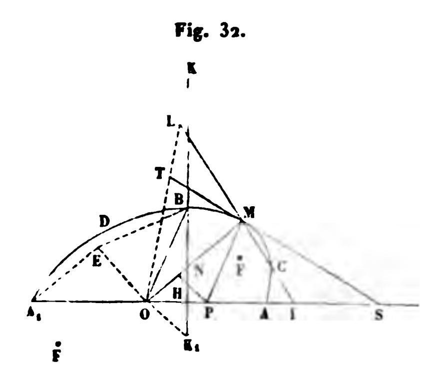
$$(2) \qquad x^2 + y^2 = 1,$$

ce que l'on peut faire en posant

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Les deux valeurs égales, mais de signes contraires, que prend chaque variable pour toute valeur de l'autre, nous

Fig. 32.



montrent que OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse.

La direction de la tangente au point M est donnée par $dx\,\mathrm{OA} + dy\,\mathrm{OB}$, dx et dy étant liés par l'équation

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

qui est la dérivée de

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Par suite, nous déterminerons la direction de la tangente par l'équipollence suivante :

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{MT} \triangleq -y\,\mathrm{OA} + x\,\mathrm{OB}$$

que nous eussions pu obtenir immédiatement, en dérivant par rapport à t la relation

$$\mathrm{OM} \triangleq \cos t\,\mathrm{OA} + \sin t\,\mathrm{OB}.$$

Cette tangente MT rencontre la droite OA au point S,

que l'on détermine en faisant la somme géométrique de OM et d'une droite parallèle à MT telle que le terme contenant OB disparaisse. De là

$$(4)\qquad \mathrm{OS} \bumpeq \mathrm{OM} - \frac{y}{x}\mathrm{MT} \bumpeq \left(x + \frac{y^2}{x}\right)\mathrm{OA} \bumpeq \frac{1}{x}\,\mathrm{OA}.$$

Par conséquent, si $\mathrm{OP} \bumpeq x\mathrm{OA}$ (de sorte que PM soit parallèle à OB), on a

$$\mathrm{OP}.\mathrm{OS} \bumpeq (\mathrm{OA})^2.$$

146. La droite

$$\mathrm{MN} \bumpeq \mathrm{MT}\,\mathrm{OB} : \mathrm{OA} \bumpeq - y\mathrm{OB} + x(\mathrm{OB})^2 : \mathrm{OA}$$

forme (16) avec la tangente l'angle constant AOB. On a

$$(5)\qquad \mathrm{ON} \bumpeq \mathrm{OM} + \mathrm{MN} \bumpeq x\mathrm{OA} + x(\mathrm{OB})^2 : \mathrm{OA} \bumpeq x\mathrm{A_1E},$$

si l'on pose

$$\mathrm{OE} \bumpeq (\mathrm{OB})^2 : \mathrm{OA},$$

c'est-à-dire si l'on forme le triangle BOE directement semblable à AOB.

Il en résulte en outre

$$\mathrm{PN} \bumpeq \mathrm{ON} - \mathrm{OP} \bumpeq x\mathrm{OE},$$

et le triangle OPN est homothétique au triangle constant $\mathrm{A_1OE}$ (ayant pris $\mathrm{A_1O} \bumpeq \mathrm{OA}$).

Quand OA, OB sont les axes, MN devient la normale, et elle coupe dans un rapport constant l'abscisse OP.

147. Si

$$c^2 + d^2 = 1$$

et

$$(6)\qquad \mathrm{OC} \bumpeq c\mathrm{OA} + d\mathrm{OB},\quad \mathrm{OD} \bumpeq - d\mathrm{OA} + c\mathrm{OB},$$

ces droites OC, OD, dont chacune est parallèle (145) à la tangente menée par l'extrémité de l'autre, sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse.

En effet, on déduit des équipollences (6)

$$OA \triangleq cOC - dOD, \quad OB \triangleq dOC + cOD,$$

et, substituant,

$$OM \triangleq (cx + dy)OC + (cy - dx)OD,$$

équipollence de la même forme que

$$OM \triangleq \cos t OA + \sin t OB,$$

car il est facile de vérifier que l'on a

$$(cx + dy)^2 + (cy - dx)^2 = 1.$$

La première expression de la règle XII (57) nous montre immédiatement que les aires des triangles OCD, OAB sont égales entre elles.

148. Entre deux demi-diamètres conjugués a lieu (147) l'équipollence

$$(OC)^2 + (OD)^2 \triangleq (OA)^2 + (OB)^2;$$

par suite, en posant

(7) $$(OA)^2 + (OB)^2 \triangleq (OF)^2,$$

nous déterminerons deux points indépendants du choix des diamètres. Ces points remarquables F, F_1 sont les foyers de l'ellipse.

L'équipollence

$$(OA)^2 \triangleq (OF - OB)(OF + OB),$$

laquelle, au moyen de $OF \triangleq - OF_1$, et en vertu de la règle I, se transforme en

$$(OA)^2 \triangleq - BF.BF_1,$$

nous montre que : *en un point quelconque* B *de l'ellipse, les deux rayons vecteurs* BF, BF_1 *forment des angles*

égaux avec la tangente à la courbe, et leur produit est égal au carré du demi-diamètre OA *parallèle à cette tangente.*

149. Le problème consistant à trouver les foyers d'une ellipse, étant donnés deux demi-diamètres conjugués, est directement résolu par l'équipollence (7). On peut la construire de plusieurs manières : ayant déterminé la droite OE (146), on a

$$(\mathrm{OF})^2 \bumpeq \mathrm{OA}\,(\mathrm{OA} + \mathrm{OE}) \bumpeq \mathrm{A_1O.A_1E};$$

par suite, l'excentricité OF sera moyenne proportionnelle entre OA et $\mathrm{A_1E}$, et parallèle à la bissectrice de l'angle $\mathrm{OA_1E}$.

Observant également que

$$(\mathrm{OF})^2 \bumpeq (\mathrm{OB} + \surd\mathrm{OA})(\mathrm{OB} - \surd\mathrm{OA}),$$

il suffira de mener BK, $\mathrm{BK_1}$ perpendiculaires et égales au demi-diamètre OA, et l'on aura

$$\mathrm{ON} \bumpeq \pm \sqrt{\mathrm{OK.OK_1}}.$$

Donc l'excentricité est aussi moyenne proportionnelle entre OK, $\mathrm{OK_1}$, et bissectrice de l'angle de ces deux droites.

150. Si l'on prend, sur l'une des droites OK, $\mathrm{OK_1}$, la longueur

$$\mathrm{OL} \bumpeq y\,\mathrm{OK} \bumpeq y\,(\mathrm{OB} + \mathrm{BK}),$$

on aura

$$\mathrm{LM} \bumpeq x\mathrm{OA} - y\mathrm{BK} \bumpeq (x - y\surd)\,\mathrm{OA}.$$

Or $x - y\surd$, puisque $x^2 + y^2 = 1$ exprime une droite égale à l'unité; par suite, LM est égale à OA.

On prolonge LM jusqu'à sa rencontre avec OA en I; il faudra donc joindre à

$$\mathrm{OL} \bumpeq y\,(\mathrm{OH} + \mathrm{HK})$$

une parallèle à

$$LM \bumpeq x\,OA - y\,BK,$$

telle que OI ait la même direction que OA, c'est-à-dire que OH; et comme HK, BK ont la même direction, il en résulte que LI s'obtiendra en multipliant LM par le rapport numérique HK : BK, en sorte que

$$OI \bumpeq y\,OH + x\,OA.HK : BK.$$

Ayant établi tout à l'heure que

$$\text{gr}.LM = \text{gr}.OA = \text{gr}.BK,$$

il en résulte que

$$\text{gr}.LI = \text{gr}.BK.$$

Par suite : *l'ellipse est décrite par le point* M *de la droite* IL *de longueur constante, qui se meut entre les droites fixes* OA, OK.

151. Dans le mouvement exprimé par l'équipollence

$$OM \bumpeq \cos t\,OA + \sin t\,OB,$$

la vitesse est donnée en grandeur et en direction par la première dérivée par rapport au temps t

$$MT \bumpeq -\sin t\,OA + \cos t\,OB.$$

La seconde dérivée est

$$-\cos t\,OA - \sin t\,OB \bumpeq MO.$$

Cette expression, étant la dérivée de la vitesse, peut être appelée l'*accélération du mouvement* (*); elle égale,

(*) Nous traduisons par *accélération* le mot italien *turbazione*, peut-être plus expressif, en ce qu'il n'implique pas l'idée d'une *augmentation* de vitesse; mais nous tenons à n'employer, autant que possible, que des expressions bien connues dans le langage mathématique en France.
(*Note du Traducteur.*)



en grandeur et en direction, ce qu'on nomme la *force accélératrice*. La précédente équipollence nous montre que l'accélération du mouvement est exprimée par le demi-diamètre de l'ellipse, de sorte que ce mouvement est celui d'un point attiré par un centre en raison directe de la distance.

(*A suivre.*)

ESSAI SUR LA DÉTERMINATION DU FROTTEMENT DE L'AIR SUR UN PROJECTILE OBLONG;

PAR M. H. RESAL.

La résistance de l'air proprement dite n'a aucune influence sur le mouvement d'un projectile oblong autour de son axe, mais ce mouvement doit être retardé par le frottement développé entre sa surface et l'air, résistance sur laquelle nous n'avons aucune donnée expérimentale.

Si l'on admet que le frottement est le même que dans les tuyaux de conduite des gaz, en le rapportant à l'unité de surface, il a pour expression

$$0,0003555\,\rho\,U^2,$$

U étant la vitesse d'un point de la surface du corps et ρ le poids spécifique de l'air que l'on peut prendre égal à $1^{kg},3$.

On peut sans inconvénient négliger la partie ogivale du projectile, en exagérant légèrement, si l'on veut, la longueur du cylindre pour établir une sorte de compensation.

Soit JR^2 le moment d'inertie du cylindre par unité de longueur, R étant son rayon, nous avons, dans l'hypo-

thèse actuelle,

$$\text{JR}\,\frac{d\text{U}}{dt} = -\,0{,}000355 \times 1^{\text{kg}},3 \times 2\pi\text{RU}^2\text{R},$$

d'où

$$\text{U} = \frac{\text{U}_0}{1 + 0{,}0029\,\dfrac{\text{V}_0\text{R}t}{\text{J}}},$$

en appelant U_0 la valeur initiale de U.

Il serait assez facile, il me semble, de vérifier si cette formule est exacte ou non, en opérant sur un cylindre creux très-léger, en aluminium par exemple, assez long par rapport au diamètre pour que l'on puisse négliger ce qui est relatif aux extrémités, reposant par deux tourillons sur les jantes croisées de deux couples de poulies identiques à ceux de la machine d'Atwood. La réduction du nombre de tours dans les minutes successives, accusée par un compteur et un chronomètre, permettrait d'établir la loi du mouvement, et par suite celle de la résistance.

Cherchons à voir maintenant à quoi peut conduire l'hypothèse admise par Navier dans le mouvement des fluides.

Soient x le rayon d'une couche fluide quelconque, V la vitesse des molécules de cette couche au bout du temps t, le frottement par unité de surface de la même couche sur la couche de rayon $x - dx$, en remarquant que $\frac{d\text{V}}{dx}$ est négatif, est de la forme $-\,\varepsilon\rho\,\frac{d\text{V}}{dx}$, ε étant une constante, et doit être considéré comme force motrice pour la première couche; le moment moteur pour la couche entière est $-\,2\pi x^2\rho\varepsilon\,\frac{d\text{V}}{dt}$; le moment résistant dû au frottement sur la couche suivante est

$$2\pi x^2\rho\varepsilon\,\frac{d\text{V}}{dx} + 2\pi\varepsilon\,\frac{d\rho x^2\,\dfrac{d\text{V}}{dx}}{dx}\,dx.$$

On a donc

$$2\pi \frac{d\rho x^2 \frac{dV}{dx}}{dx} - 2\pi x^2 \rho \frac{dV}{dt} = 0.$$

Si l'on considère que le mouvement de l'air devient insensible à une distance assez faible d'un corps tournant, on peut considérer ρ comme constant, et alors l'équation ci-dessus se réduit à la suivante :

(1) $$\frac{dV}{dt} = \varepsilon \left(\frac{2}{x} \frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2} \right),$$

qui n'est autre chose que celle du mouvement de la chaleur dans une sphère.

Le frottement entre le corps et le fluide est de la forme

$$\alpha (U - V_1),$$

α étant une constante et V_1 la vitesse de la couche fluide en contact avec le corps. On a, d'après Navier,

$$-\varepsilon\rho \frac{dV}{dx} = \alpha (U - V_1) \quad \text{pour} \quad x = R,$$

ou, en posant $\frac{\alpha}{\varepsilon\rho} = h$,

(2) $$\frac{dV}{dx} + h (U - V_1) = 0 \quad \text{pour} \quad x = R;$$

nous avons maintenant comme seconde condition

(3) $$V = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

$f(x)$ étant une fonction donnée.

En supposant, pour plus de simplicité, que les forces extérieures ne donnent pas de couple perpendiculaire à l'axe, nous aurons

(4) $$J \frac{dU}{dt} = -2\pi\alpha (U - V_1) R,$$

avec la condition

$$(5) \qquad U = U_0 \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les équations (1) et (4), avec les conditions (2), (3), (5), doivent résoudre complétement le problème.

La première de ces équations est satisfaite par

$$(6) \qquad V = \frac{e^{-\varepsilon n^2 t}}{x}(A \cos nx + B \sin nx),$$

n étant un nombre positif quelconque, A et B deux constantes arbitraires.

Si l'on pose

$$U = Ce^{-\varepsilon n^2 t},$$

les conditions (2) et (4) donnent

$$A\left[\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}+h\right)\cos nR + n \sin nR\right]$$
$$+ B\left[\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}+h\right)\sin nR - n \cos nR\right] = hC,$$
$$\frac{\varepsilon n^2 J}{2\pi\alpha R} = c - A\cos nR - B\sin nR,$$

ce qui permettra de déterminer A et B en fonction de C et de n.

On aura ensuite

$$f(x)\,x = \Sigma(A\cos nx + B\sin nx), \quad U_0 = \Sigma C,$$

pour déterminer les n et les C; mais je ne vois pas de méthode qui puisse conduire à ce résultat.

Pour que les intégrales des équations (1) et (4) ne renferment chacune qu'un seul terme, il faut que

$$f(x)\,x = A\cos nx + B\sin nx, \quad U_0 = C,$$

et la fonction ne dépendra ainsi que d'un paramètre n.

On pourrait, par exemple, se proposer de déterminer la valeur que doit avoir n pour que $f(x)$ par rapport à x fût un maximum, de manière à se rapprocher de l'actualité où $f(x) = 0$. Nous ne croyons pas devoir nous livrer à cette recherche.

Le fait important pour nous est que U doit être de la forme He^{-mt}, H et m étant des fonctions de R qu'il appartient à l'expérience de déterminer, si toutefois l'hypothèse de Navier, qui nous a servi de point de départ, est exacte.

APPLICATION DE LA GÉNÉRALISATION DU PRINCIPE DE CORRESPONDANCE A LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION;

Par M. Louis SALTEL.

Principe fondamental. — Lorsqu'on a sur une droite k séries de points $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ tels que, prenant arbitrairement : 1° un point A_1 de la première série, 2° un point A_2 de la seconde série, 3° un point A_3 de la troisième série,..., au point A_{k-1} de la $(k-1)^{ième}$ série, correspondent α_k points de la $k^{ième}$ série, et, de même, à $k-1$ points de $(k-1)$ quelconques de ces séries correspondent α_i points pour la série restante S_i, il existe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k$ points qui, considérés comme appartenant à $(k-1)$ quelconques des k séries, coïncident chacun avec un point correspondant pris dans la série restante.

Nota. — Si l'on ne considère que deux séries de points, on retrouve le principe de correspondance de M. Chasles.

De ce principe fondamental résultent immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant le paramètre r entre les équations*

$$(1) \qquad f_a^\alpha(x, y, r) = 0, \quad f_a^\alpha(x, y, z, r) = 0,$$

$$(2) \qquad f_b^\beta(x, y, r) = 0, \quad f_b^\beta(x, y, z, r) = 0,$$

de degré a, b par rapport aux variables (x, y), (x, y, z), *et dont les coefficients sont des fonctions de degré* α, β *par rapport au paramètre r, est, en général, d'un ordre marqué par*

$$a\beta + b\alpha.$$

Théorème II. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s entre les équations*

$$(1) \qquad f_a^\alpha(x, y, r, s) = 0, \quad f_a^\alpha(x, y, z, r, s) = 0,$$

$$(2) \qquad f_b^\beta(x, y, r, s) = 0, \quad f_b^\beta(x, y, z, r, s) = 0,$$

$$(3) \qquad f_c^\gamma(x, y, r, s) = 0, \quad f_c^\gamma(x, y, z, r, s) = 0,$$

de degré a, b, c par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ *par rapport aux paramètres r, s, est, en général, d'un ordre marqué par*

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta.$$

Théorème III. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t entre les équations*

$$(1) \qquad f_a^\alpha(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t) = 0,$$

$$(2) \qquad f_b^\beta(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_b^\beta(x, y, z, r, s, t) = 0,$$

$$(3) \qquad f_c^\gamma(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_c^\gamma(x, y, z, r, s, t) = 0,$$

$$(4) \qquad f_d^\delta(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_d^\delta(x, y, z, r, s, t) = 0,$$

de degré a, b, c, d par rapport aux variables x, y, z,

et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ *par rapport aux paramètres* r, s, t, *est, en général, d'un ordre marqué par*

$$a\beta\gamma\delta + b\alpha\gamma\delta + c\alpha\beta\delta + d\alpha\beta\gamma.$$

Nota. — La loi générale est évidente.

Théorème IV. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres* r, s *entre les équations*

$$(1)\qquad f_a^\alpha(x, y, r, s) = 0, \quad f_a^\alpha(x, y, z, r, s) = 0,$$
$$(2)\qquad f_b^\beta(x, y, r, s) = 0, \quad f_b^\beta(x, y, z, r, s) = 0,$$
$$(3)\qquad f^\gamma(r, s) = 0, \quad f^\gamma(r, s) = 0,$$

de degré a, b *par rapport aux variables* x, y, z, *et dont les coefficients sont des fonctions de degré* α, β, γ *par rapport aux paramètres* r, s, *est, en général, d'un ordre marqué par*

$$\gamma(a\beta + b\alpha).$$

Théorème V. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres* r, s, t *entre les équations*

$$(1)\qquad f_a^\alpha(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t) = 0,$$
$$(2)\qquad f_b^\beta(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_b^\beta(x, y, z, r, s, t) = 0,$$
$$(3)\qquad f^\gamma(r, s, t) = 0, \quad f^\gamma(r, s, t) = 0,$$
$$(4)\qquad f^\delta(r, s, t) = 0, \quad f^\delta(r, s, t) = 0,$$

de degré a, b *par rapport aux variables* x, y, z, *et dont les coefficients sont des fonctions de degré* α, β, γ, δ *par rapport aux paramètres* r, s, t, *est, en général, d'un ordre marqué par*

$$\gamma\delta(a\beta + b\alpha).$$

Théorème VI. — *Le degré de l'équation du lieu géo-*

métrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t, u entre les équations

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_a^\alpha(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t, u) = 0,\\
(2) & f_b^\beta(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_b^\beta(x, y, z, r, s, t, u) = 0,\\
(3) & f^\gamma(r, s, t, u) = 0, & f^\gamma(r, s, t, u) = 0,\\
(4) & f^\delta(r, s, t, u) = 0, & f^\delta(r, s, t, u) = 0,\\
(5) & f^\lambda(r, s, t, u) = 0, & f^\lambda(r, s, t, u) = 0,
\end{array}$$

de degré a, b par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ, λ par rapport aux paramètres r, s, t, u, est, en général, d'un ordre marqué par

$$\gamma\delta\lambda(a\beta + b\alpha).$$

Nota. — La loi générale est évidente.

Théorème VII. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t entre les équations*

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_a^\alpha(x, y, r, s, t) = 0, & f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t) = 0,\\
(2) & f_b^\beta(x, y, r, s, t) = 0, & f_b^\beta(x, y, z, r, s, t) = 0,\\
(3) & f_c^\gamma(x, y, r, s, t) = 0, & f_c^\gamma(x, y, z, r, s, t) = 0,\\
(4) & f^\delta(r, s, t) = 0, & f^\delta(r, s, t) = 0,
\end{array}$$

de degré a, b, c par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ par rapport aux paramètres r, s, t, est, en général, d'un ordre marqué par

$$\delta(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta).$$

Théorème VIII. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t, u*

entre les équations

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_a^\alpha(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t, u) = 0,\\
(2) & f_b^\beta(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_b^\beta(x, y, z, r, s, t, u) = 0,\\
(3) & f_c^\gamma(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_c^\gamma(x, y, z, r, s, t, u) = 0,\\
(4) & f^\delta(r, s, t, u) = 0, & f^\delta(r, s, t, u) = 0,\\
(5) & f^\lambda(r, s, t, u) = 0, & f^\lambda(r, s, t, u) = 0,
\end{array}$$

de degré a, b, c *par rapport aux variables* x, y, z, *et dont les coefficients sont des fonctions de degré* α, β, γ, δ, λ *par rapport aux paramètres* r, s, t, u, *est, en général, d'un ordre marqué par*

$$\delta\lambda(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta).$$

Théorème IX. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres* r, s, t, u, v *entre les équations*

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_a^\alpha(x, y, r, s, t, u, v) = 0, & f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t, u, v) = 0,\\
(2) & f_b^\beta(x, y, r, s, t, u, v) = 0, & f_b^\beta(x, y, z, r, s, t, u, v) = 0,\\
(3) & f_c^\gamma(x, y, r, s, t, u, v) = 0, & f_c^\gamma(x, y, z, r, s, t, u, v) = 0,\\
(4) & f^\delta(r, s, t, u, v) = 0, & f^\delta(r, s, t, u, v) = 0,\\
(5) & f^\lambda(r, s, t, u, v) = 0, & f^\lambda(r, s, t, u, v) = 0,\\
(6) & f^\mu(r, s, t, u, v) = 0, & f^\mu(r, s, t, u, v) = 0,
\end{array}$$

de degré a, b, c *par rapport aux variables* x, y, z, *et dont les coefficients sont des fonctions de degré* α, β, γ, δ, λ, μ *par rapport aux paramètres* r, s, t, u, v, *est, en général, d'un ordre marqué par*

$$\delta\lambda\mu(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta).$$

Nota. — La loi générale est évidente.

Théorème X. — *Le* principe fondamental *permet de trouver immédiatement le degré de l'équation du lieu*

géométrique obtenu en éliminant n paramètres entre $n+1$ équations de degrés donnés par rapport aux variables x, y, z (quelques-unes d'entre elles pouvant d'ailleurs être de degré zéro par rapport à ces variables x, y, z), et dont les coefficients sont des fonctions de degrés également donnés par rapport aux n paramètres.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. John Casey, à Tivoli (Nord), Kingstown. — Dans la Note de M. Laguerre, relative à un article de M. Cayley, dans le numéro de juillet 1870 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, se trouve le passage suivant : « M. Cayley, dans la Note qui précède, attribue à M. Casey l'élégant théorème qui permet de construire la courbe de pénombre comme l'enveloppe d'une série de cercles : j'ignore dans quel Mémoire et à quelle époque M. Casey a énoncé cette propriété. »

Afin de fixer M. Laguerre à ce sujet, je viens lui faire connaître que ce théorème est l'une des bases de mon Mémoire sur les *Courbes biquadratiques*, publié dans le tome XXIV des *Comptes rendus de l'Académie royale d'Irlande*, p. 457-569. Ce Mémoire fut rédigé en 1866 et lu devant ladite Académie le 10 février 1867. Le théorème fondamental fut découvert en 1865, et je l'avais considéré comme un théorème isolé. Je ne le croyais certainement pas d'une aussi grande importance; je m'étais trompé, car je le reconnus très-fertile par ses conséquences, et j'en fis la base d'une nouvelle méthode de recherches géométriques. Cette méthode est appliquée

dans mon Mémoire sur les *Courbes biquadratiques* et a été très-favorablement accueillie par les mathématiciens.

J'ajoute, en terminant, qu'avant ce numéro des *Nouvelles Annales* je n'avais vu aucun mathématicien réclamer la priorité de ma découverte et que sa publication n'avait pas soulevé la moindre réclamation d'aucun autre auteur.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet, à Nantes. — A propos de la question 1049, M. Doucet semble croire que les équations de deux tangentes à une courbe rectangulaire doivent avoir nécessairement la forme

$$y = px + f(p), \quad y = -\frac{1}{p}x + f\left(-\frac{1}{p}\right).$$

Il n'en est rien, et cette hypothèse conduit à un résultat faux. Pour qu'une droite $y = px + q$ soit tangente à une courbe, il faut que p et q satisfassent à une certaine relation

$$F(p, q) = 0.$$

Soient

$$q = f(p) \quad \text{et} \quad q = f_1(p)$$

deux racines de cette équation en q; il est clair que, si les deux tangentes

$$y = px + f(p) \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{p}x + f_1\left(-\frac{1}{p}\right)$$

se coupent, pour toutes les valeurs de p, sur une circonférence fixe, la courbe jouira de la propriété énoncée par la question et ne satisfera pas à la condition trouvée par M. Doucet.

Il me semble que la solution la plus générale de la question est celle-ci :

Soient

$$(y-\beta)^2+m(x-\alpha)(y-\beta)-(x-\alpha)^2=0$$

deux droites rectangulaires se coupant au point (α, β); α, β, m étant trois paramètres arbitraires, satisfaisant aux relations

$$\alpha^2+\beta^2-R^2=0, \quad F(\alpha, \beta, m)=0,$$

F désignant une relation arbitraire. Dans ces conditions, l'enveloppe des deux droites jouira de la propriété énoncée par la question. Lorsque F sera donné, on obtiendra la courbe correspondante en éliminant α, β, m entre les quatre équations

$$(y-\beta)^2+m(x-\alpha)(y-\beta)-(x-\alpha)^2=0,$$
$$\alpha^2+\beta^2-R^2=0, \quad F(\alpha, \beta, m)=0,$$
$$\begin{vmatrix} 2(y-\beta)+m(x-\alpha) & -2(x-\alpha)+m(y-\beta) & (x-\alpha)(y-\beta) \\ \beta & \alpha & 0 \\ F'_\beta & F'_\alpha & F'_m \end{vmatrix}=0.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 944

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 276);

PAR M. MORET-BLANC.

Deux ellipses égales sont tangentes à la même droite au même point fixe, l'une par l'extrémité du grand axe, l'autre par l'extrémité du petit axe. Les deux demi-axes sont liés par la relation $ab =$ const. *On demande :*

1° *Le lieu des points d'intersection;*

2° *Le lieu des milieux des tangentes communes.*

Prenons le point fixe pour origine des coordonnées rectangulaires et la tangente donnée pour axe des x, et posons $ab=k^2$.

Les équations des deux ellipses sont

$$(1)\qquad a^2y^2+b^2x^2-2a^2by=0,$$
$$(2)\qquad b^2y^2+a^2x^2-2ab^2y=0.$$

1° Pour avoir le lieu des points d'intersection, il faut éliminer a et b entre ces deux équations, et

$$(3)\qquad ab=k^2.$$

Ajoutant les deux premières, multipliées respectivement par $-b$ et $+a$, on a

$$(a^3-b^3)x^2-k^2(a-b)y^2=0.$$

Écartons le cas de $a=b$, que nous examinerons à part, et divisons par $(a-b)$; il vient

$$(4)\qquad [(a+b)^2-k^2]x^2-k^2y^2=0,$$

ou

$$(4')\qquad (a+b)^2x^2=k^2(x^2+y^2).$$

Si l'on retranche l'équation (2) de l'équation (1), on a

$$(a^2-b^2)(y^2-x^2)-2k^2(a-b)y=0,$$

et, en divisant par $(a-b)$,

$$(5)\qquad (a+b)(y^2-x^2)-2k^2y=0.$$

Éliminant enfin $(a+b)$ entre les équations (4′) et (5), on a

$$(6)\qquad 4k^2x^2y^2=(y^2-x^2)^2(x^2+y^2)$$

pour l'équation du lieu des intersections, ou en coor-

données polaires

$$k^2 \sin^2 2\theta = r^2 \cos^2 2\theta,$$

(7) $$r = \pm k \operatorname{tang} 2\theta.$$

En vertu de l'équation (4), $\frac{y^2}{x^2} = \operatorname{tang}^2\theta$ a sa valeur minimum pour $a + b$ minimum, ce qui a lieu pour $a = b = k$; alors $\operatorname{tang}^2\theta = 3$, $\operatorname{tang}\theta = \sqrt{3}$; il en résulte qu'il faut faire varier θ seulement de 60 à 120 degrés ; et, comme r ne doit avoir que des valeurs positives, il faut d'abord prendre

$$r = - \operatorname{tang} 2\theta.$$

Pour $\theta = 60°$,

$$r = k\sqrt{3}, \quad x = \frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2};$$

θ croissant de 60 à 90 degrés, r décroît de $k\sqrt{3}$ à 0 ; puis, $\operatorname{tang} 2\theta$ devenant positive, on prendra la formule

$$r = k \operatorname{tang} 2\theta;$$

θ croissant de 90 à 120 degrés, r croîtra de 0 à $k\sqrt{3}$.

Pour des valeurs supplémentaires de θ, les valeurs de r sont égales ; la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y. Elle le sera aussi par rapport à l'axe des x, si l'on construit les ellipses des deux côtés de la droite fixe.

Si l'on fait $a = b$, les deux ellipses se confondent avec la circonférence

$$x^2 + y^2 - 2ky = 0.$$

2° Soit $y = mx + n$ l'équation d'une tangente commune.

En remplaçant y par $mx + n$ dans les équations (1) et (2), elles deviennent

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2m(n - b)x + a^2(n^2 - 2bn) = 0,$$
$$(b^2m^2 + a^2)x^2 + 2b^2m(n - a)x + b^2(n^2 - 2an) = 0.$$

Exprimant que chacune de ces équations a deux racines égales, on a, toutes réductions faites,

$$a^2m^2 - n^2 + 2bn = 0,$$
$$b^2m^2 - n^2 + 2an = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$(a^2 - b^2)m^2 = 2(a-b)n, \quad m^2(a+b) = 2n,$$
$$(a^2 - b^2)n^2 - 2(a^3 - b^3)n = 0,$$
$$(a+b)n^2 - 2(a^2 + ab + b^2)n = 0,$$
$$n = \frac{2(a^2+ab+b^2)}{a+b}, \quad m^2 = \frac{4(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2};$$

$n = 0$ donne l'axe des x tangent aux deux ellipses à l'origine.

Les coordonnées des points de contact sont, pour la première ellipse,

$$x' = \frac{a^2m(b-n)}{a^2m^2+b^2}, \quad y' = \frac{a^2m^2b + b^2n}{a^2m^2+b^2},$$

et, pour la seconde,

$$x'' = \frac{b^2m(a-n)}{b^2m^2+a^2}, \quad y = \frac{ab^2m^2 + a^2n}{b^2m^2+a^2}.$$

Les coordonnées d'un point du lieu cherché sont

$$x = \frac{x + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2},$$

ou

$$x = \frac{a^2b^2(a+b-2n)m^3 + ab(a^3+b^3)m - (a^4+b^4)mn}{2(a^2m^2+b^2)(b^2m^2+a^2)},$$
$$y = \frac{a^2b^2(a+b)m^4 + ab(a^3+b^3)m^2 + (a^4+b^4)m^2n + 2a^2b^2n}{2(a^2m^2+b^2)(b^2m^2+a^2)}.$$

Si l'on pose

$$a + b = z, \quad ab = k^2,$$

d'où

$$n = \frac{2(z^2-k^2)}{z}, \quad m^2 = \frac{4(z^2-k^2)}{z^2},$$

les valeurs de x et y deviennent

$$x = \frac{2z^8 - 11k^2z^6 + 27k^4z^4 - 32k^6z^2 + 16k^8}{4z^8 - 20k^2z^6 + 41k^4z^4 - 40k^6z^2 + 16k^8}\sqrt{z^2 - k^2},$$

$$y = \frac{(4z^6 - 18k^2z^4 + 28k^4z^2 - 16k^6)(z^2 - k^2)z}{4z^8 - 20k^2z^6 + 41k^4z^4 - 40k^6z^2 + 16k^8},$$

z devant varier de $2k$ à $+\infty$.

L'élimination de z entre ces deux équations conduirait à celle de la courbe, lieu des milieux des tangentes communes; mais, comme cette équation serait fort compliquée, il est plus simple de regarder la courbe comme définie par les deux équations précédentes.

Pour $z = 2k$,

$$x = \frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2}.$$

On peut aussi exprimer x et y en fonction de m. On trouve

$$x = km\frac{(1-m^2)(4-m^2)^2m^2 + (3m^2-8)(4-m^2) - (m^4-8)m^2}{[(m^4+1)(4-m^2)^2 + 2(m^4-8)m^2]\sqrt{4-m^2}};$$

$$y = k\frac{(4-m^2)^2m^4 + (4-m^2)(3m^2-8)m^2 + (m^4-8)m^4 + (4-m^2)^2m^2}{[(m^4+1)(4-m^2)^2 + 2(m^4-8)m^2]\sqrt{4-m^2}},$$

m^2 devant varier depuis sa valeur minimum 3, correspondant à $a = b = k$, jusqu'à sa valeur maximum 4.

Pour $m^2 = 3$,

$$x = \pm\frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2}.$$

Pour $m^2 = 4$, x et y sont infinis; mais $\frac{y}{x} = \pm 2$.

Le coefficient angulaire des asymptotes est ± 2.

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.



Questions 970 *et* 1028

(voir 2e série, t. X, p. 240);

Par M. MORET-BLANC.

Étant donnée une ellipse, on lui circonscrit un triangle dont les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés correspondants : trouver le lieu des sommets de ces triangles. (F. V.)

Soient

$$(1)\qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse donnée, α et β les coordonnées d'un point du lieu. L'équation de la corde de contact des tangentes issues du point (α, β) sera

$$(2)\qquad a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2.$$

Éliminant successivement y et x entre ces deux équations, on a, pour déterminer les coordonnées des points de contact de ces tangentes, les équations

$$(3)\qquad (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)x^2 - 2a^2b^2\alpha x + a^4(b^2 - \beta^2) = 0,$$

$$(4)\qquad (a^2\beta^2 + b^3\alpha^2)y^2 - 2a^2b^2\beta y + b^2(a^2 - \alpha^2) = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a^2b^2\alpha \pm a^2\beta\sqrt{a^2\beta^2 + b^2x^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2} = \begin{cases} x_1, \\ x_2, \end{cases}$$

$$y = \frac{a^2b^2\beta \mp b^2\alpha\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2} = \begin{cases} y_1, \\ y_2. \end{cases}$$

Les tangentes aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) et les normales aux mêmes points ont respectivement pour équations

$$(5)\qquad b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2,$$

$$(6)\qquad b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2,$$

$$(7)\qquad a^2y_1x - b^2x_1y = c^2x_1y_1,$$

$$(8)\qquad a^2y_2x - b^2x_2y = c^2x_2y_2.$$

Appelant x', y' les coordonnées du point d'intersection des lignes (6) et (7), et x'', y'' celles du point d'intersection des lignes (5) et (8), ces équations donnent

$$x' = x_1 \frac{a^2b^4 + a^2c^2y_1y_2}{a^4y_1y_2 + b^4x_1x_2} = x_1 \frac{(a^2+c^2)\beta^2 + b^2\alpha^2 - b^2c^2}{b^2(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)},$$

$$y' = y_1 \frac{a^4b^2 - b^2c^2x_1x_2}{a^4y_1y_2 + b^4x_1x_2} = y_1 \frac{a^2\beta^2 + (b^2-c^2)\alpha^2 + a^2c^2}{a^2(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)},$$

$$x'' = x_2 \frac{a^2b^4 + a^2c^2y_1y_2}{a^4y_1y_2 + b^4x_1x_2} = x_2 \frac{(a^2+c^2)\beta^2 + b^2\alpha^2 - b^2c^2}{b^2(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)},$$

$$y'' = y_2 \frac{a^4b^2 - b^2c^2x_1x_2}{a^4y_1y_2 + b^4x_1x_2} = y_2 \frac{a^2\beta^2 + (b^2-c^2)\alpha^2 + a^2c^2}{a^2(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{(a^2+c^2)\beta^2 + b^2\alpha^2 - b^2c^2}{b^2(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)} = \mathrm{M}, \quad \frac{a^2\beta^2 + (b^2-c^2)\alpha^2 + a^2c^2}{a^2(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)} = \mathrm{N},$$

on aura

$$x' = \mathrm{M}x_1, \quad y' = \mathrm{N}y_1.$$
$$x'' = \mathrm{M}x_2, \quad y'' = \mathrm{N}y_2.$$

Il faut exprimer que les points (x', y'), (x'', y'') sont sur une même tangente à l'ellipse.

Appelons x_3, y_3 les coordonnées du point de contact, on aura les deux conditions

$$a^2y'y_3 + b^2x'x_3 = a^2b^2,$$
$$a^2y''y_3 + b^2x''x_3 = a^2b^2,$$

d'où l'on tire

$$y_3 = \frac{b^2(x'-x'')}{x'y''-x''y'}, \quad x_3 = \frac{a^2(y''-y')}{x'y''-x''y'}.$$

Ces coordonnées doivent vérifier l'équation de l'ellipse, ce qui donne

$$b^2(x'-x'')^2 + a^2(y''-y')^2 = (x'y''-x''y')^2,$$

ou

(9) $b^2\mathrm{M}^2(x_1-x_2)^2 + a^2\mathrm{N}^2(y_2-y_1)^2 = \mathrm{M}^2\mathrm{N}^2(x_1y_2-x_2y_1)^2.$

Or on a, en posant, pour abréger,

$$\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}=\mathrm{R},\quad a^2\beta^2+b^2\alpha^2=\mathrm{D},$$

$$x_1-x_2=\frac{2a^2\beta\mathrm{R}}{\mathrm{D}},\quad y_2-y_1=\frac{2b^2\alpha\mathrm{R}}{\mathrm{D}},$$

$$x_1y_2-x_2y_1=\frac{2a^2b^2\mathrm{R}}{\mathrm{D}}.$$

L'équation (9) devient, en supprimant le facteur $\frac{4a^2b^2\mathrm{R}^2}{\mathrm{D}^2}$, qui n'est jamais nul,

$$a^2\mathrm{M}^2\beta^2+b^2\mathrm{N}^2\alpha^2=a^2b^2\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2,$$

ou

$$\frac{\alpha^2}{b^2\mathrm{M}^2}+\frac{\beta^2}{a^2\mathrm{N}^2}=1,$$

et enfin, en remettant pour M et N leurs valeurs,

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2)^2b^2\alpha^2}{[(a^2+c^2)\beta^2+b^2\alpha^2-b^2c^2]^2}=\frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2)^2a^2\beta^2}{[a^2\beta^2+(b^2-c^2)\alpha^2+a^2c^2]^2}=1.$$

On vérifie sans peine que la normale à l'ellipse, au point (x_3, y_3), passe par le point (α, β).

Note. — La même question a été résolue par M. Gambey.

Seconde solution de la question 1034;

PAR M. L. PAINVIN.

La question 1034 résolue dans un des derniers numéros des *Nouvelles Annales*, même tome, p. 364, peut encore se résoudre de la manière suivante.

Le théorème à démontrer est ainsi énoncé :

On prend sur une surface du second ordre une section plane quelconque; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle circonscrite à une quelconque des surfaces du second ordre homofocales à la première.

Soit l'équation tangentielle de la surface donnée

(1) $$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0;$$

l'équation d'une section plane sera

(2) $$f_0(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) - (a^2u_0u + b^2v_0v + c^2w_0w - 1)^2 = 0,$$

où u_0, v_0, w_0 sont les coordonnées fixes du plan sécant, et

(2 *bis*) $$f_0 = a^2u_0^2 + b^2v_0^2 + c^2w_0^2 - 1.$$

Or, si l'on considère la surface

(3) $$f_0(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) + k(u^2 + v^2 + w^2) \\ - (a^2u_0u + b^2v_0v + c^2w_0w - 1)^2 = 0,$$

k étant une constante arbitraire, cette surface est évidemment circonscrite à une des homofocales de la surface (1), et elle admet pour focale la courbe plane (2). En effet, pour déterminer les focales d'une surface $F(u, v, w) = 0$, il suffit de déterminer λ de manière que l'équation

$$F(u, v, w) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

représente une courbe plane; or, si l'on applique cette règle à la surface (3), en faisant $\lambda = -k$, on obtient la courbe plane (2); donc, etc.

CORRESPONDANCE.

La proposition énoncée (même tome, p. 520, *troisièmement*) est démontrée dans la *Géométrie à trois dimensions*, publiée, en 1872, par M. Painvin.

J'en ai été informé récemment par deux lettres.

G.

RECTIFICATION POUR LA QUESTION 1119.

Au lieu de : « Parmi tous les triangles ayant un même angle *dont le cosinus et le sinus* sont supposés commensurables, » *lisez :* « *dont le cosinus* est commensurable. »

QUESTION.

1124. Si, sur une sphère dont le rayon est pris pour unité, on trace une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées x, y, z de tout point de cette ligne, la relation

$$(x'^2+y'^2+z'^2)[(xy''-yx'')^2+(yz''-zy'')^2+(zx''-xy'')^2]$$
$$=(x'x''+y'y''+z'z'')^2$$
$$+[x(y'z''-z'y'')+y(z'x''-x'z'')+z(x'y''-y'x'')]^2,$$

dans laquelle les accents des dérivées sont relatifs à une variable indépendante t (*). (CATALAN.)

ERRATUM.

Dans le *Bullettino* du prince Boncompagni, les articles suivants :

Dieci lettere inedite di *Giuseppo Luigi Lagrange* ad Antonio Maria Lorgna.

Intorno a nove lettere, in lingua italiana, di *Giuseppo Luigi Lagrange*. — *B. Boncompagni*.

ont été publiés en mars 1873, et non en septembre 1872.

(*) Voir, *Nouvelles Annales*, p. 48, 1865, une relation analogue à celle-ci : *Remarque*. — Cette identité peut servir à trouver une infinité de solutions de l'équation indéterminée

$$(P^2+Q^2+R^2)(X^2+Y^2+Z^2)=U^2+V^2.$$

On en conclut, par exemple,

$$(24^2+7^2+15^2)(30^2+36^2+23^2)=375^2+1475^2.$$

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XII, 2e SÉRIE.)

Arithmétique et théorie des nombres.

Trigonométrie.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Géométrie supérieure.

Géométrie infinitésimale.

Calcul différentiel et intégral.

Calcul des probabilités.

Mécanique.

Correspondance et Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XII, 2e SÉRIE.)

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.





